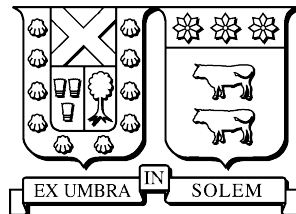


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO - CHILE



**MODELAMIENTO MATEMÁTICO APLICADO A LA  
CORRECCIÓN FOTOMÉTRICA DE OBSERVACIONES  
ASTRONÓMICAS**

**FRANCISCO RICHTER MENDOZA**

MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

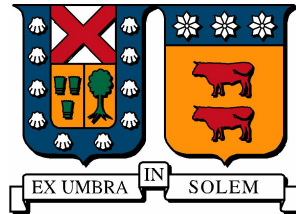
PROFESORES GUÍAS

Dr. FERNANDO SELMAN R.

Dr. PEDRO GAJARDO A.

VALPARAÍSO, 2012-2013

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO - CHILE



**Modelamiento Matemático Aplicado a la Corrección  
Fotométrica de Observaciones Astronómicas**

**FRANCISCO RICHTER MENDOZA**

MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

PROFESOR GUÍA	:	Dr. FERNANDO SELMAN R.
PROFESOR REFERENTE	:	Dr. PEDRO GAJARDO A.
PROFESOR INVITADO	:	Dr. JUAN PEYPOUQUET U.

VALPARAÍSO, 2012-2013

## Advertencia

Los derechos sobre este trabajo son de todas y todos quienes quieran utilizarlo.

## Reconocimiento

La realización de este trabajo fue posible gracias al soporte de ESO (European Southern Observatory) [www.eso.org](http://www.eso.org). Mis profunda gratitud a la organización por dar cabida a este proyecto de investigación.



---

## Agradecimientos

Debo confesar que esta sección, la de agradecimientos, es la sección que esperé con mas ansias escribir, pues este trabajo es producto de las energías de varias personas, y sin ellas jamás esto hubiera sido posible.

En lo profesional quisiera expresar mis más sinceros agradecimientos a los científicos que guiaron este trabajo: Fernando y Pedro.

Agradezco muchísimo a Fernando Selman por darme la oportunidad de trabajar junto a él en un ambiente donde se respira la investigación de mas alto nivel mundial. Le agradezco muchísimo el riesgo que tomó al decidir trabajar conmigo en un proyecto que de forma muy excepcional fue asignado a un estudiante de pregrado por parte de ESO. Le agradezco la confianza, las conversaciones, los almuerzos, sus enseñanzas y la pasión que me traspasó por la astronomía y por la ciencia.

Agradezco a Pedro Gajardo por todos estos años de formación profesional, desde el primer curso de análisis real hasta el último curso de modelación matemática. Junto con los años en que tuve la suerte de trabajar con él como ayudante y finalmente haber aceptado ser profesor referente de este trabajo sin dudarlo en un segundo con siempre la mejor disponibilidad y voluntad. Agradezco además al profesor Juan Peypouquet por sus comentarios y ayudas durante el trabajo y al profesor Luis Briceño por las muy efectivas correcciones y voluntad.

Quisiera dar un muy especial agradecimiento al profesor Pawel Kröger, quién me enseñó muchísimo durante todos mis años de estudio. Agradezco sus infinitas conversaciones hasta altas horas de la madrugada... mi pasión por las matemáticas sería menor sin todas sus enseñanzas.

Agradezco también a mis compañeros, en especial a mi compadre Jean Paul quién me acompañó durante todo este recorrido.

Agradezco haber estudiado una carrera humana y humanista, donde se respiraba la conciencia social y se renegaba del adoctrinamiento que las universidades algunas veces logran implantar... agradezco la crítica constante, la alegría y la rebeldía.

En lo personal agradezco incansablemente a mi madre, a quien está dedicado este trabajo. Esta memoria y todos los años de estudio se deben exclusivamente a su potencia de mujer.

Agradezco también a Nicolassa por su paciencia y compañerismo.

Para finalizar quisiera agradecer a muchísima gente mas, creo que podría escribir un capítulo tan largo como cualquiera de los de este trabajo de solo agradecimientos... haciendo un recorrido de las cientos de personas que me enseñaron a lo largo de todos estos años, pero creo que puedo abarcarlo a tod@s agradeciendo al entorno del que tod@s somos parte:

Agradezco a la vida y a la tierra... agradezco a la madre naturaleza quién me da fuerzas, pasión y ganas. Agradezco muy especialmente al mar, a ese hermoso mar



---

que me acompañó día a día por todos estos años de años desde muchísimos puntos de mi ser... desde todos... andando en bicicleta a mi lado, compartiendo un vino, haciendo música, caminando, amando, viviendo. Agradezco a mi ciudad, Valparaíso, le agradezco haberme cobijado y hacerme sentir de algún lugar.



---

## Dedicatoria

*A la kuku:*

Este trabajo está totalmente dedicado a mi madre. . . todas y todos quienes vienen detrás de ella y son parte de su esencia y su sensibilidad:

- A las mujeres: quienes como ella vivieron la vida mucho mas difícil de lo que debería haber sido debido a esta sociedad machista y patriarcal.
- A l@s homosexuales: quienes como mi hermano cargaron con el peso de "ser diferentes" y tuvieron (junto con nosotr@s sus familias) que regirse por las malditas reglas de una sociedad homofóbica donde las parejas no se pueden ni amar con tranquilidad en las plazas de las ciudades.
- A l@s nadies: Al joven de mi edad que solo por nacer pobre jamás tuvo la mínima oportunidad de escribir este trabajo. A las "minorías" que este sistema deja fuera. A l@s indígenas y en especial al pueblo mapuche donde siempre estuvo y está el corazón de mi madre.



---

## Resumen

Se busca modelar la función de variación de punto cero [39] considerando una variable atmosférica que en trabajos anteriores no era considerada. Esto con el objetivo de implementar dicha corrección para cielos tanto fotométricos como no fotométricos.

Con este norte se desarrollan métodos de minimización, tomando en cuenta tanto el mal condicionamiento del sistema dado, como la presencia de outliers propia de este tipo de datos fotométricos. Para ese objetivo se aplica una variante al método de máximo descenso para funciones no diferenciables, y finalmente se aplica una mejora por medio de consideraciones geométricas propias de la función  $\|Ax - b\|_1$ .





# Índice

Agradecimientos	5
Dedicatoria	7
Resumen	8
Índice	9
Índice de figuras	10
<b>1. Introducción</b>	<b>12</b>
<b>2. Definiciones Previas: Astronomía y Fotometría</b>	<b>15</b>
2.1 REM visible . . . . .	15
2.2 Las magnitudes Astronómicas . . . . .	16
2.3 Flujo y energía . . . . .	17
2.4 Filtros y colores . . . . .	19
2.5 La Atmósfera . . . . .	19
2.6 Flat Field y la función de variación del punto cero . . . . .	21
<b>3. Formulación Matemática del problema</b>	<b>25</b>
3.1 Aproximación polinomial para funciones en 2 dimensiones . . . . .	25
3.2 El modelo de diferencias . . . . .	27
3.3 Mínimos cuadrados ordinarios . . . . .	30
3.4 El modelo de diferencias de diferencias . . . . .	32
3.5 Implementación . . . . .	36
<b>4. Condicionamiento del sistema</b>	<b>40</b>
4.1 Análisis de condicionamiento para los modelos fotométricos . . . . .	40
4.2 Regularización de los modelos . . . . .	44
4.3 Aplicación . . . . .	46
<b>5. Minimización para la norma <math>l_1</math></b>	<b>49</b>
5.1 Motivación . . . . .	49
5.2 Generalización del método de máximo descenso a la norma $l_1$ . . . . .	53
5.3 Parámetros y algoritmo a utilizar . . . . .	55
5.4 Criterio de parada . . . . .	57
5.5 Alternativa geométrica . . . . .	58
<b>6. Conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>66</b>



## Índice de figuras

1.	Quásar 3C 273. Imágen obtenida del sitio oficial de la NASA. . . . .	12
2.	Primer instrumento de análisis fotométrico (obtenido de [8]). . . . .	16
3.	Magnitud de una estrella. El brillo del objeto y la posición son calculados utilizando la suma de los valores dentro del círculo interior menos el promedio del brillo del cielo por la cantidad de pixeles en el círculo interior. El brillo del cielo es calculado utilizando los valores entregados por la región entre el anillo medio y el anillo exterior. Fuente: [48]. . . . .	18
4.	Espectros de longitud de onda para distintos filtros. Obtenido de [42] . . . . .	20
5.	Absorción atmosférica para distintos efectos de luz. Fuente: [10]. . . . .	21
6.	Corrección de imagen para la estrella HIC 59206. Créditos ESO Press Release 12 de marzo, 2004. . . . .	21
7.	Esquema de defectos producidos por el procedimiento de Flat Fielding. Fuente: [2] . . . . .	23
8.	Imagen tomada el 19 de mayo del 2011 en el observatorio La Silla . . . . .	26
9.	Ejemplo de conjunto de polinomios linealmente independientes $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	28
10.	Representación cartesiana del campo de estrellas y su valor de magnitud fotométrica. . . . .	29
11.	Representación de un subconjunto de un cúmulo de estrellas tomado en 2 imágenes con desfase. . . . .	30
12.	Interpretación Geométrica de las tres normas más utilizadas. (Fuente: [23]). . . . .	31
13.	Aproximación polinomial de grado 10 . . . . .	32
14.	Diagrama del procedimiento de obtención de variación del punto cero. . . . .	36
15.	Relación de magnitudes estelares versus el error de medición entregado por fotometría. Cada punto corresponde a una estrella de la Figura 8. . . . .	37
16.	Aproximación de grado 5 mediante el primer método (a la izquierda), y el método de diferencias de diferencias (a la derecha) para los datos de la Figura 8. . . . .	38
17.	Gráfico del Número de Condición vs grado de polinomio para ambos modelos. Aca podemos ver el sistema se malcondiciona notablemente mas rápido para el modelo 2. . . . .	44
18.	Aproximaciones de grados 3 a 14 mediante el método de diferencias de diferencias para los datos test (imagen 8). En la esquina superior izquierda se encuentra la aproximación polinomial de grado 3, a su derecha la aproximación de grado 4 y así sucesivamente hasta la aproximación de grado 14 en la esquina inferior derecha. . . . .	47
19.	Linea punteada para norma $l_1$ y linea continua mínimos cuadrados. Los puntos blancos representan los datos. (imágen tomada de [11]) . . . . .	50
20.	Aproximación mediante los 2 métodos distintos. Los puntos negros representan los datos. (imágen tomada de [9]) . . . . .	50
21.	En el punto $b_1$ la función $f$ es diferenciable y su subgradiente es igual a su gradiente. En el punto $b_2$ la función no es diferenciable y tiene muchos subgradientes. (imágen obtenida de [7]). . . . .	51
22.	Figura tomada de [7] . . . . .	52



23.	Método iterativo de máximo descenso de minimización de la función $f(b)$ .	54
24.	Gráfico del valor de $\ Ab - M\ _1$ a lo largo de las iteraciones para un paso $\lambda_k = \frac{1}{k}$	56
25.	Gráfico del valor de $\ Ab - M\ _1$ a lo largo de las iteraciones para distintos pasos constantes, las curvas azul y verde corresponden a valores de $\lambda$ mas grandes donde podemos ver que en un principio desciende mas rápido el valor de la función objetivo, pero con mucha oscilación. Para las curvas negro, amarillo y burdeo no vemos oscilación, pero vemos un decrecimiento cada vez mas lento.	57
26.	Suma de 5 funciones de valores absolutos	59
27.	Función $ -2b_1 + b_2 + 2 $	60
28.	Ejemplo de una función $f(b) = \ Ab - M\ _1$ .	61
29.	Aproximación de grado 5 para datos tomados el 19-5-2011. A la izquierda se encuentra la solución de mínimos cuadrados y a la derecha la solución por medio de minimizar la norma $l_1$	62
30.	Comparación para los 3 métodos con datos de cielo fotométrico. Aca podemos ver como la minimización de norma $l_1$ subsana (observar la escala de los gráficos) los problemas detectados previamente. Los gráficos son realizados con diferentes softwares, pues el primero corresponde a un gráfico antiguo utilizado para comparar, pero es importante notar en las escalas de los gráficos, la cual muestra en el segundo gráfico un problema de escala, que como se vió a lo largo de la tesis responde a un mal condicionamiento del segundo método implementado y a problemas de outliers. Si bien este método no responde precisamente para polinomios de orden alto es necesario de implementar para subsanar problemas de la atmósfera. En el tercer gráfico se puede ver una mejora en la escala, sin los problemas del método dos y, a diferencia del primer gráfico, añadiendo la componente atmosférica.	63



# Capítulo 1

## Introducción

“Begin at the beginning,” the King said, gravely, “and go on till you come to an end; then stop.”

Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*, 1899

Durante las últimas décadas, la Astronomía ha experimentado un asombroso crecimiento. Nunca antes hubo tantas y tan poderosas herramientas para observar el cielo. Estas herramientas han permitido a los astrónomos observar una vasta cantidad de objetos raros imposibles de detectar sin ellas, tales como estrellas muy frías o quasars [25].

Este increíble progreso ha sido posible gracias a los enormes avances tecnológicos en cuanto a detectores y ciencias de la información dentro de los años recientes. Un importante efecto de este desarrollo es basado en las grandes cantidades de datos que ha sido posible almacenar mediante dichas herramientas, pudiendo obtener imágenes en amplios espectros lumínicos, los cuales entregan preciada información de parte del universo.

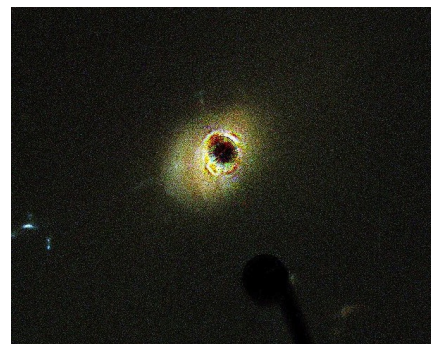


Figura 1: Quásar 3C 273. Imagen obtenida del sitio oficial de la NASA.

Entre estas herramientas, los detectores CCD [34] ubicados en los telescopios, constituyen un importante eslabón, permitiendo precisión y rendimiento nunca antes alcanzado. De ese modo se logra agrupar imágenes y datos a una tasa del orden de las decenas de millones de píxeles por segundo. Luego, se hace necesario tener mecanismos



eficientes de procesamiento, de forma de evitar información redundante, para permitir una comprensión efectiva y eficiente de las grandes cantidades de datos que obtenemos.

El procedimiento de obtener datos útiles y fidedignos a partir de telescopios e instrumentos de alto nivel es un proceso complejo, que aún está en proceso de mejoras.

Dentro de este contexto se enmarca este trabajo, el cual desarrolla modelos matemáticos aplicando herramientas de optimización y de análisis con el objetivo de complementar el procedimiento de corrección de imágenes astronómicas.

Esta tesis constituye un aporte tanto a la astronomía (o mas específicamente a la fotometría) como al modelamiento matemático, razón por la cual está escrita tanto para especialistas de ambas áreas, como también a lectores relacionados a la ingeniería en general.

La tesis está organizada de la siguiente manera: El capítulo 2 revisa conocimientos básicos de Fotometría, el cual para un(a) lector(a) familiarizada con el tema puede ser obviado, el objetivo de este capítulo es situar el contexto y la naturaleza de los modelos y datos con los que se trabaja, e introducir a un lector ajeno a la fotometría a este trabajo sin ningún inconveniente posterior. En el capítulo 3 se establecen los modelos utilizados durante este trabajo, revisando un modelo previamente utilizado, y desarrollando un modelo mas completo en relación a la naturaleza física del fenómeno, junto con esto se establecen inconvenientes relacionados a ambos modelos marcando los lineamientos para el siguiente capítulo. En el capítulo 4 se desarrolla la teoría matemática del mal condicionamiento del sistema y se proponen soluciones con resultados positivos. En el capítulo 5 se aborda una segunda alternativa aplicando herramientas avanzadas de optimización junto con un respaldo teórico aplicado a dichas herramientas.





## Capítulo 2

### Definiciones Previas: Astronomía y Fotometría

“ Creen los mayas que al principio de la historia, cuando los dioses nos dieron nacimiento, nosotros los humanos, éramos capaces de ver mas allá del horizonte. Entonces estábamos recién fundados, y los dioses nos arrojaron polvo a los ojos para que no fuéramos tan poderosos. ”

---

Eduardo Galeano, *El libro de los abrazos*

La Astronomía es una ciencia que por sus encantos no deja a nadie indiferente. Principalmente por lo maravilloso e intrigante que pueden llegar a ser las imágenes del universo. Sin embargo, a nivel científico, no basta con las imágenes. Estas en primera instancia constituyen el primer paso al investigar en astronomía, pero sólo a nivel morfológico, es decir, para clasificar objetos por su forma. Acto seguido, surgen de forma natural interrogantes cuantitativas sobre los cuerpos: ¿cuán lejano se encuentra el objeto? ¿cuánta energía emite? ¿que tan caliente es?, etc...

La información más fundamental que podemos medir en cuanto a un objeto celeste fuera de nuestro sistema solar, corresponde a la cantidad de energía, en forma de radiación electromagnética, que recibimos del objeto. Esta cantidad es llamada *flujo* y la ciencia de medir el flujo que recibimos de un cuerpo celeste es llamada *fotometría*.

En las últimas décadas el crecimiento tecnológico ha aumentado exponencialmente y con ello los distintos métodos de observación interestelar. Este capítulo busca abarcar una breve introducción a los términos fotométricos, con el objetivo de introducir al lector a este lenguaje, concluyendo con el procedimiento de Flat Fielding, con el cual está estrechamente ligada esta tesis.

### REM visible

Prácticamente toda la información que viene de afuera del sistema solar viene hacia nosotros como algún tipo de radiación electromagnética (REM). Podemos detectar y es-

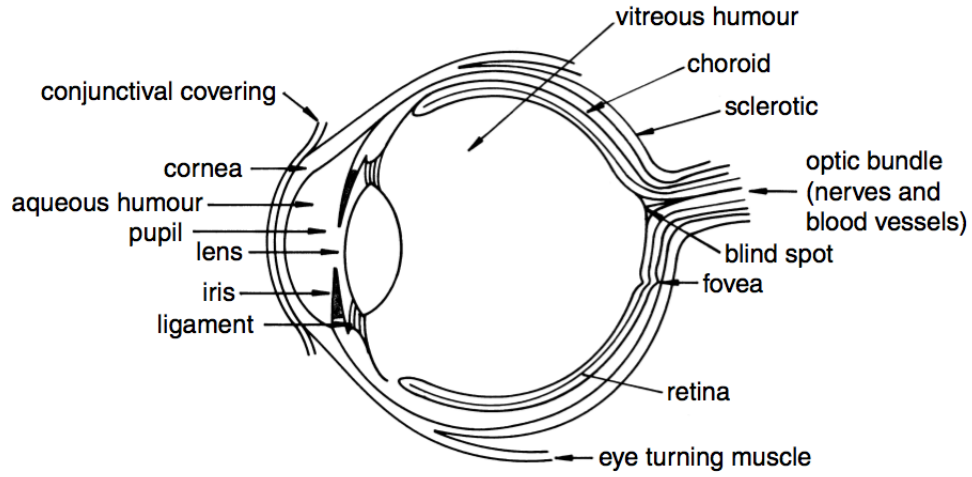


Figura 2: Primer instrumento de análisis fotométrico (obtenido de [8]).

tudiar la REM ya sea como un fenómeno ondulatorio o como un fenómeno corpuscular.

En la visión corpuscular de la REM la energía se transmite en paquetes discretos llamados fotones. Un fotón tiene una energía definida y una frecuencia o longitud de onda. La relación entre la energía del fotón ( $E_f$ ) y la frecuencia del fotón ( $\nu$ ) está dada por

$$E_f = h\nu$$

donde  $h$  corresponde a la constante de Plank. La ecuacion anterior es equivalente a

$$E_f = \frac{hc}{\lambda}$$

para  $\lambda$  la longitud de onda correspondiente al fotón y  $c$  es la velocidad de la luz [28]. La ecuación anterior es consecuencia de la identidad  $c = \lambda\nu$ .

Si bien la luz visible constituye una fracción muy pequeña del espectro completo de REM, ésta juega un papel fundamental para la astronomía por varias razones. La gran mayoría de los instrumentos de medición están diseñados para detectar ondas en este espectro, además gran parte del complemento de éste es bloqueado por la atmósfera y puede ser sólo analizado por telescopios que se encuentren en el espacio. Sin embargo, estos telescopios tienen varios inconvenientes, entre ellos el costo de su uso. En términos astronómicos, la importancia de la banda visible del espectro de REM radica en que la mayoría de las estrellas y galaxias emiten un fracción significativa de su energía en estas longitudes. Este no es el caso de cuerpos fríos tales como planetas, polvo interestelar, o nubes moleculares, los cuales emiten en espectros cercanos al infrarrojo o longitudes más largas.





## Las Magnitudes Astronómicas

Usualmente hablamos de *magnitudes astronómicas* para referirnos a varios tipos de mediciones diferentes, tales como el brillo observado (flujos de energía o energía recibida por unidad de tiempo o área) de estrellas y su luminosidad. El primer catálogo de magnitudes estelares fue realizado por Hiparco, hace más o menos 2200 años atrás, donde clasificó las estrellas en 6 niveles de magnitud.

Mucho después, cuando los astrónomos fueron capaces de realizar medidas mas exactas del brillo de las estrellas, se demostró que la escala de Hiparco sigue una tendencia logarítmica. El  $i$ -ésimo nivel de magnitud es aproximadamente 2,5 veces mas brillante que el nivel  $i - 1$ . Basado en el sistema de magnitudes de Hiparco, pero usando sistemas de medición modernos, los astrónomos decidieron definir un sistema de magnitudes donde 5 magnitudes corresponden exactamente a un factor 100 en el brillo o flujo. Así, la estrella  $i$  tiene exactamente  $100^{1/5} = 2,512$  veces el brillo de la estrella  $i - 1$ .

De este modo podemos definir la diferencia de magnitudes entre 2 estrellas,  $m_1$  y  $m_2$ , como

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log_{10}(f_1/f_2), \quad (1)$$

donde,  $f_i$  corresponde al flujo de la estrella  $i$ , el cuál, como veremos mas adelante, es la energía recibida en unidad de tiempo y de área. Esta constituye la ecuación fundamental para trabajar con magnitudes. Notemos además que de aquí podemos obtener los flujos a partir de las magnitudes

$$\frac{f_1}{f_2} = 10^{-0,4(m_1 - m_2)}.$$

El uso mas común de las magnitudes es expresar el brillo aparente de las estrellas. Para obtener un valor para la magnitud de una estrella (en vez de diferencias entre pares de estrellas), se toma una estrella de partida, o *punto cero*, para el sistema de magnitudes. El punto cero es usualmente dado por la estrella Vega (ref. [29]), para la cual muchos obseadores ya han hecho el difícil trabajo de medir su flujo, que se considera constante. Luego, la magnitud de cualquier estrella  $i$  en relación al flujo luminoso emitido por Vega ( $f_{vega}$ ) corresponde a

$$m_i = -2,5 \log \left( \frac{f_i}{f_{vega}} \right)$$

Estas magnitudes son llamadas *magnitudes aparentes*, pues depende de la distancia entre la estrella y la tierra. Las *magnitudes absolutas* se relacionan al verdadero brillo o luminosidad de un objeto. Para obtener la magnitud absoluta de un objeto, debemos saber la distancia del objeto y la cantidad de polvos estelares entre el objeto y nosotros entre otras cosas. Obtener este valor con precisión es un proceso bastante complicado.

## Flujo y energía

Las magnitudes estelares son la base de este trabajo, es por eso que se hace fundamental entender un poco más en profundidad qué es lo que concretamente quiere decir

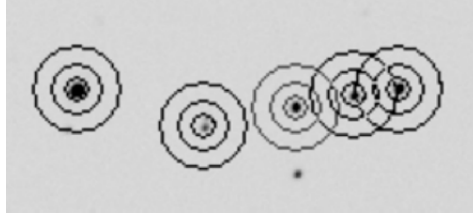


Figura 3: Magnitud de una estrella. El brillo del objeto y la posición son calculados utilizando la suma de los valores dentro del círculo interior menos el promedio del brillo del cielo por la cantidad de pixeles en el círculo interior. El brillo del cielo es calculado utilizando los valores entregados por la región entre el anillo medio y el anillo exterior. Fuente: [48].

la ecuación (1).

Como fue mencionado anteriormente, el objetivo principal de observar el espacio consiste en realizar medidas de la REM para un determinado cuerpo celeste con la mayor precisión posible. Existen, por supuesto, muchos detalles que son objeto de estudio. Estos abarcan precisión en la resolución de los objetos observados, precisión en las longitudes de onda, y precisión en los tiempos de exposición. Un sistema perfecto de medición es aquel que permitiera entregar información de la cantidad de radiación, como una función de la longitud de onda, en cualquier parte del cielo para espacios arbitrariamente pequeños. Sin duda tal sistema no existe, y es necesario lidiar con estas limitaciones. Del criterio de Rayleigh (ref. [6]) se tiene que dado un diámetro de telescopio fijo, a mayor longitud de onda se tiene menor resolución.

El objetivo principal de la espectrofotometría consiste en obtener la distribución de la energía espectral (DEE) de los cuerpos celestes, o cómo la energía de un cuerpo es distribuida en longitudes de onda. Para ello se quiere medir la cantidad de energía recibida por un observador fuera de la atmósfera terrestre por segundo, por unidad de área, por unidad de longitud de onda o por intervalo de frecuencia. Si medimos por intervalo unitario de longitud de onda, las unidades de densidad de flujo espectral son de la forma

$$f_{\lambda} = \text{erg s}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{\AA}^{-1}$$

o en intervalos unitarios de frecuencia

$$f_{\nu} = \text{erg s}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$$

Además, tenemos la relación

$$f_{\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} f_{\nu}$$

De este modo, la espectrofotometría, puede ser caracterizada por la resolución de longitud de onda o de frecuencia, la cual corresponde al menor intervalo para el cual tenemos información. i.e, si tenemos 1 Å de resolución, entonces sabemos el flujo para



cada Ångstrom de intervalo de longitud de onda.

## Filtros y colores

Como fue descrito en la sección anterior, para un estudio preciso de los cuerpos es importante obtener la cantidad de luz recibida por intervalos limitados de longitudes de onda. Una forma eficiente de realizar este trabajo es por medio de filtros de luz, los cuales permiten seleccionar rangos de longitud de onda. Los cuerpos celestes emiten luz en una gran banda de REM.

Al realizar observaciones astronómicas, muchas veces estamos interesados en determinadas frecuencias de REM. Un sistema de filtros muy utilizado en la región óptica del espectro corresponde al sistema **UBV**. Cada letra corresponde a un filtro distinto: U para el ultravioleta, B para el azul, y V para el espectro visual (la Figura 4 muestra un gráfico de los valores para el espectro de longitud de onda para cada filtro).

En este sentido definimos las magnitudes de cada filtro- i.e  $m_V$  (o simplemente  $V$ ) es la magnitud del filtro  $V$ - . Usando filtros de ancho de banda (como el UBV) definimos el *índice de color* como la diferencia entre magnitudes en 2 colores, así

$$B - V = m_B - m_V$$

define el índice de color  $B - V$ .

ahora podemos aplicar (1) para una misma estrella, donde obtenemos

$$B - V = m_B - m_V = -2,5 \log(f_B/f_V) + cte$$

En este caso  $f_X$  es el flujo promedio sobre todas las longitudes de onda para el filtro  $X$ . La constante  $cte$  debe incluirse pues depende de la definición de punto cero utilizada para el sistema de colores. Así por convención decimos que el color  $B - V$  de vega corresponde al valor 0,00. Para este sistema tenemos que el color  $B - V$  del sol corresponde a 0,67 por ejemplo.

Al momento de realizar el modelamiento matemático, es importante notar que las magnitudes son esencialmente logaritmos del flujo, por lo que no es conveniente sumar o restar flujos, si no, operar con magnitudes.

## La Atmósfera

Sin duda la atmósfera ejerce un gran bien para la humanidad, nos provee de oxígeno y nos protege de elementos dañinos como rayos X, la REM ultravioleta, rayos cósmicos, etc... Sin embargo al momento de realizar observaciones astronómicas, esta se transforma en un verdadero problema.

Complicaciones como nubes o contaminación no son los mayores problemas, ya que usualmente los telescopios son situados en lugares alejados de la civilización y con cielos muy despejados, sin embargo, incluso en el lugar más adecuado para realizar observaciones existen muchos efectos perjudiciales debido a la atmósfera (ref. [34]):

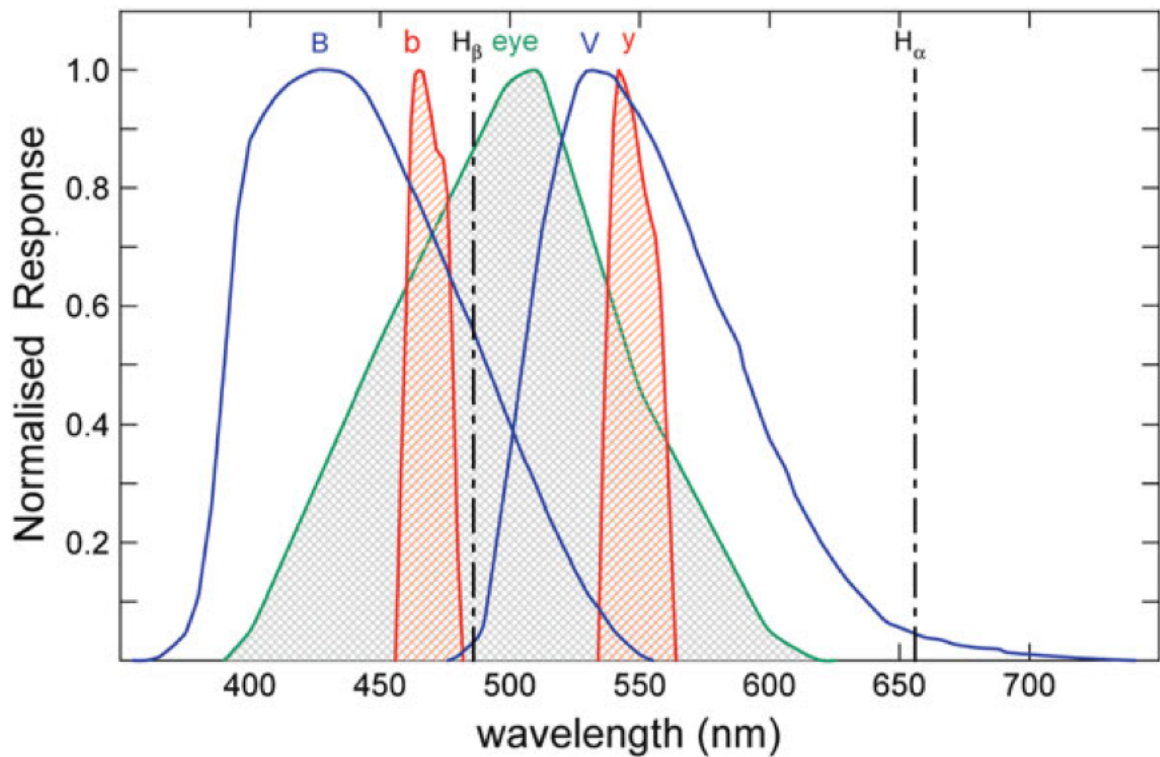


Figura 4: Espectros de longitud de onda para distintos filtros. Obtenido de [42]

- Limitación del ancho de banda del espectro de REM
- Difusión: Pérdida de resolución de las imágenes de cuerpos celestes debido al paso de la luz a través de la turbulencia atmosférica.
- La atmósfera incluso muy lejos de las luces de las ciudades brilla debido a procesos atómicos en el aire. Esta luz emitida por el cielo, llamada *Skyglow*, es un gran problema al observar objetos débiles, pues los fotones provenientes del Skyglow producen ruido extra, lo que degrada la predicción en las mediciones.
- A excepción del caso en que el telescopio apunte hacia el cenit <sup>1</sup>, la atmósfera se comporta como un prisma débil, esparciendo la luz en espectros pequeños a lo largo del círculo máximo que une al cenit y el objeto - el ángulo que hace este círculo con el círculo máximo que pasa por el objeto y los polos celestes recibe el nombre de *ángulo paraláctico*-. Este efecto es llamado *Refracción atmosférica*.

Tomando en cuenta esto, existen fundamentalmente dos formas de hacer fotometría: la *fotometría en todo el cielo* y la *fotometría diferencial*. En la fotometría en todo el cielo se compara el objeto que buscamos medir con estrellas medidas en distintas partes del cielo, este tipo de fotometría requiere de un cielo absolutamente despejado. Cuando nos encontramos con condiciones adecuadas para la fotometría de cielo completo (sin nubes ni polvo en la atmósfera) decimos que tenemos un *cielo fotométrico*.

<sup>1</sup>El cenit es por definición el vector normal a la superficie de la tierra



Estas condiciones sin embargo no son muy usuales (alrededor del 40 % de las noches para el VLT). Afortunadamente el segundo método puede ser realizado, usando cámaras CCD, en condiciones de nubes parciales en el cielo. Para la fotometría diferencial comparamos el brillo del objeto desconocido (usualmente variable, como por ejemplo una supernova) con el brillo de las estrellas en el mismo marco de una misma CCD. Si una nube bloquea parte de la luz durante el tiempo de exposición, este bloqueará a ambos objetos. La habilidad de realizar fotometría diferencial es una gran ventaja para las cámaras CCD y es esta la técnica utilizada para los datos que se utilizan para este trabajo.

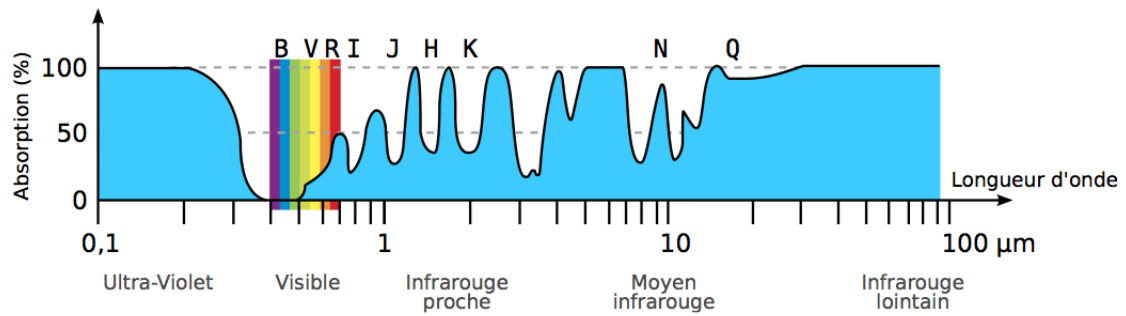


Figura 5: Absorción atmosférica para distintos efectos de luz. Fuente: [10].

## Flat field y la función de variación del punto cero

Acercándonos a la génesis de este trabajo, y para finalizar este capítulo, nos concentraremos en un proceso fundamental en el trayecto de obtener una buena imagen astronómica: el proceso de Flat Field.

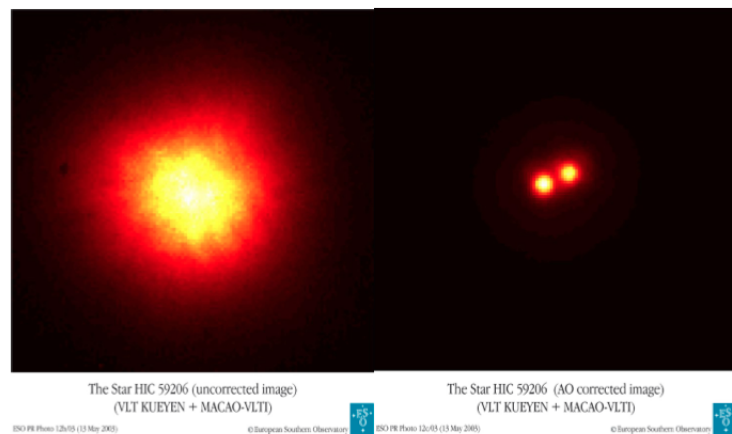


Figura 6: Corrección de imagen para la estrella HIC 59206. Créditos ESO Press Release 12 de marzo, 2004.

Como hemos comentado a lo largo del capítulo, el proceso de observar el espacio con telescopios de alto nivel tiene muchas piedras de tope. Al utilizar telescopios con

cámaras CCD, es necesario realizar permanentemente calibraciones, pues estos sufren de defectos que alteran directamente la imagen, los cuales son gatillados por variaciones en la sensibilidad pixel a pixel del CCD, viñeteo del sistema óptico, suciedad sobre el detector, etc.

El *flat field*, campo plano, o imagen de armonización de eficiencias de pixeles, es una imagen que se obtiene observando una pantalla iluminada uniformemente (la cúpula del telescopio, el cielo en el crepúsculo, etc). Si el sistema telescopio+instrumento fuese "ideal" la imagen obtenida sería constante (con las variaciones naturales del ruido de Poisson o shot noise). Sin embargo en la realidad está lejos de ser constante, y es común tener variaciones que pueden ser típicamente de alrededor de un 10 %. El campo plano es ésta imagen, normalizada a un valor máximo de 1. Si dividimos dos imágenes de campo plano entre sí obtendremos un valor constante sin importar las variaciones al interior de ellas. De la misma manera, si dividimos la imagen de un campo estelar por una imagen de campo plano, el fondo de la imagen será constante. Lo importante es que no solo es fondo es constante, si no, y más importante, la sensibilidad de cada pixel pasa a ser constante. En esta imagen así corregida la magnitud que medimos a una estrella no dependerá en que lugar de la imagen se encuentra.

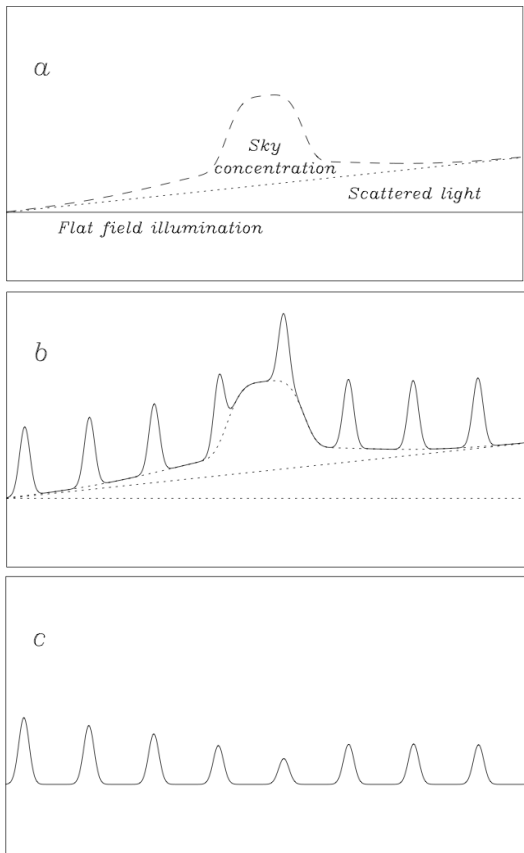
El proceso de realizar esta calibración es llamado *Flat fielding*. En la práctica existen algunos problemas relacionados al proceso de obtener una iluminación uniforme requerida para el flat field:

- Para campos de visión grandes, es difícil evitar gradientes en la iluminación del plano (especialmente para flat field realizados con el crepúsculo).
- La dispersión de la luz, dentro del telescopio y los instrumentos, genera una redistribución incontrolable de la misma en el campo plano.
- Para instrumentos de reducción focal, las múltiples reflexiones en la óptica dentro del telescopio producen una imagen fantasma en el flat field.

En consecuencia, en muchos casos la imagen de campo plano está contaminada por luz (que puede venir de reflejos al interior de la óptica). Esta luz hace que esta imagen de campo plano no sea exactamente una medida field de la variación de sensibilidad en el campo. Esto se traducirá que la magnitud de una estrella medida en distintas partes del detector varíe. Esta variación, que es independiente de la estrella que se utiliza para medirla, es lo que llamaremos *variación de punto cero* [38].

En la figura 7 podemos observar un diagrama que muestra cómo afectan los efectos ocasionados por el procedimiento de Flat Fielding sobre las magnitudes estelares obtenidas. Una explicación detallada de lo anterior puede encontrarse en [2, 46].

En relación a estos efectos, es que se hace necesario buscar una función que describa sus consecuencias en la imagen, detectando la verdadera variación punto cero, de esta forma pudiendo corregirlos y obtener una imagen de calidad superior. La búsqueda de esta función es el foco principal de esta memoria.



a) Ejemplo de una exposición de campo plano, con contribuciones de errores denotados con las líneas punteadas e intermitentes

b) Ejemplo de una exposición científica de ocho estrellas de igual magnitud a lo largo del flat field anterior

c) La imagen resultante luego de aplicar el Flat Fielding. Note que las magnitudes aún no entregan los mismos valores para todas debido a los errores de corrección en el flat field. Son estos errores los que se busca determinar

Figura 7: Esquema de defectos producidos por el procedimiento de Flat Fielding. Fuente: [2]







## Capítulo 3

### Formulación Matemática del problema

“Existe una opinión generalizada según la cual la matemática es la ciencia más difícil cuando en realidad es la más simple de todas. La causa de esta paradoja reside en el hecho de que, precisamente por su simplicidad, los razonamientos matemáticos equivocados quedan a la vista. En una compleja cuestión de política o arte, hay tantos factores en juego y tantos desconocidos e inaparentes, que es muy difícil distinguir lo verdadero de lo falso. El resultado es que cualquier tonto se cree en condiciones de discutir sobre política y arte -y en verdad lo hace- mientras que mira la matemática desde una respetuosa distancia.”

---

Ernesto Sábato,

En base a la teoría fotométrica presentada en el capítulo anterior, buscamos una formulación matemática que nos permita modelar el comportamiento de las diferencias de magnitudes producto de las limitaciones físicas que el observar el firmamento presenta. Concretamente, el objetivo consiste en corregir los errores en la imagen producidos por el proceso de flat fielding o equivalentemente, encontrar la función de variación de punto cero (zero point variation), la cual llamaremos  $zp(x, y)$ , para cada punto del campo del telescopio (el cual podemos ver como un plano cartesiano). Notemos, por lo expuesto en el capítulo anterior, que esta es una función que solamente depende de las coordenadas espaciales  $(x, y)$ , y no de la estrella observada, como es el caso de las magnitudes estelares.

En la Figura 8 podemos ver una imagen tomada en el observatorio La Silla [13]. A partir de esta imagen, obtenemos datos fotométricos (descritos en el capítulo anterior) y en base a ellos buscamos una formulación matemática del error obtenido de la corrección.

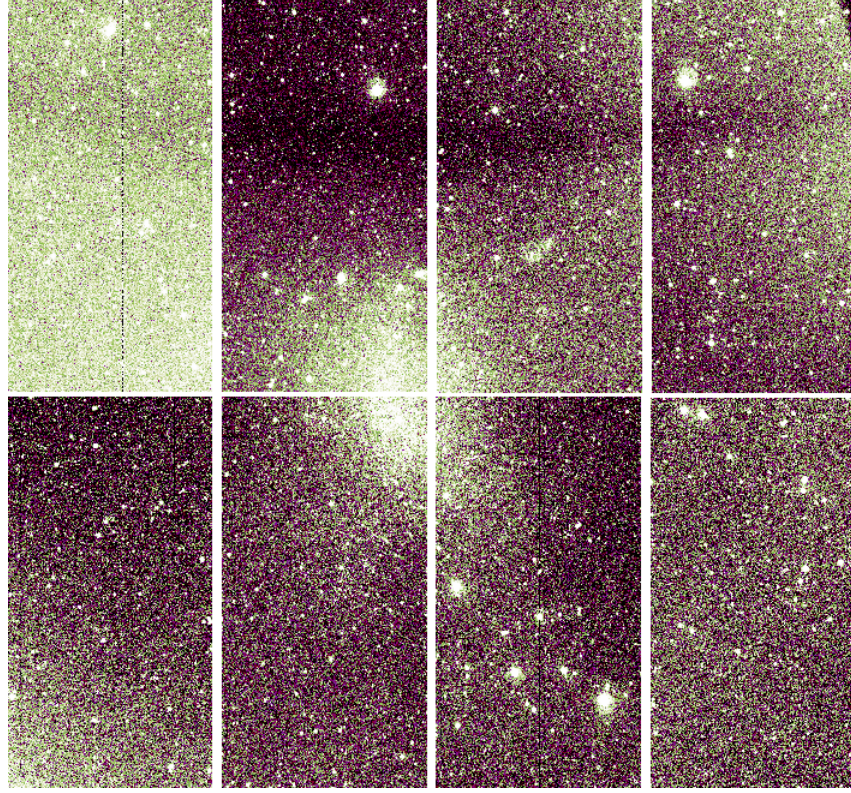


Figura 8: Imagen tomada el 19 de mayo del 2011 en el observatorio La Silla

## Aproximación polinomial para funciones en 2 dimensiones

Con el objetivo de encontrar una aproximación adecuada para  $zp(x, y)$ , muchos textos de fotometría (ver por ejemplo [41]) suponen que la variación responde a un comportamiento de polinomios en 2 dimensiones. De esta forma, podemos caracterizar  $zp(x, y)$  escribiendo

$$zp(x, y) = b_1\varphi_1(x, y) + b_2\varphi_2(x, y) + \cdots + b_n\varphi_n(x, y) \quad (2)$$

donde  $\varphi_j(x, y)$  corresponde a un polinomio de grado  $j$ .

Previo a la aproximación de  $zp(x, y)$ , se hace necesario revisar algunos resultados sobre aproximaciones polinomiales. Consideremos una función  $z(x, y)$  y  $m$  puntos en el espacio con coordenadas  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ . Desde la caracterización (2) para los  $m$  puntos, tenemos las  $m$  ecuaciones

$$zp(x_i, y_i) = b_1\varphi_1(x_i, y_i) + b_2\varphi_2(x_i, y_i) + \cdots + b_n\varphi_n(x_i, y_i) \quad (3)$$

o escrito de forma matricial, obtenemos el sistema

$$Z = \Psi \mathbf{b}$$

Así, si la solución  $\mathbf{b}$  es única tenemos la función  $z(x, y)$  completamente determinada.



**DEFINICIÓN 1** Decimos que un conjunto de polinomios  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  es linealmente independiente si para todo  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  se cumple que

$$\sum_{j=1}^n a_j \varphi_j = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad a_i = 0, \forall a_i.$$

**TEOREMA 1** Para polinomios linealmente independientes  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , la solución del sistema (3)

$$z^*(x_i, y_i) = \sum_{j=0}^n b_j^* \varphi_j(x_i, y_i), \quad i = \{1, \dots, n\}$$

tiene una única solución.

Si bien este teorema es aplicable a sistemas con igual número de ecuaciones que incógnitas (el cual no es nuestro caso de estudio), este resultado constituye un primer paso hacia el modelamiento de  $zp(x, y)$ . La demostración se puede encontrar en [5].

Por otro lado, fotométricamente podemos suponer que la aproximación que buscamos se comporta de forma polinomial. Matemáticamente, este supuesto es justificado por el teorema de Wierstrass para funciones continuas aunque  $zp(x, y)$  no tenga un comportamiento polinomial

**TEOREMA 2** Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua definida en un subconjunto cerrado  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}$ , entonces para cualquier  $\epsilon > 0$  existe un polinomio  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \{|f(x, y) - p(x, y)|\} < \epsilon$$

Una demostración de este clásico teorema puede ser encontrada en [36, 35].

De esta forma, sustentados en lo anterior, se elegirán conjuntos de polinomios linealmente independientes.

## El modelo 1

La variación del punto cero es una variación de la magnitud estelar de las estrellas producto de la observación. Esta hace que el valor fotométrico (medido) para el telescopio sea distinto al valor real.

Así, la variación del punto cero se define, en una primera instancia, como

$$zp(x, y) = m(x, y) - m_i \quad (4)$$

donde

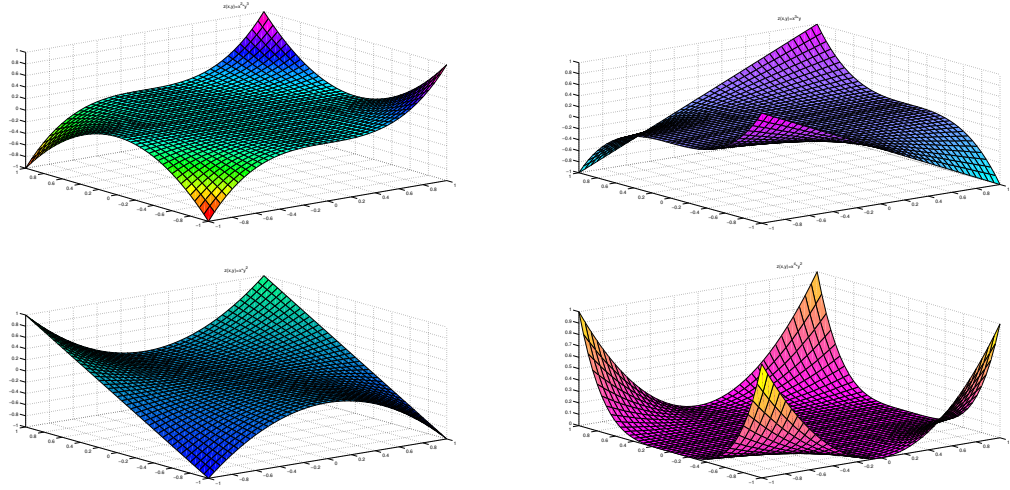


Figura 9: Ejemplo de conjunto de polinomios linealmente independientes  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- $m(x, y)$  corresponde a la magnitud fotométrica registrada por el telescopio para la estrella que se encuentra en el punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
- $m_i$  corresponde a la magnitud real de la estrella  $i$  (la cuál es desconocida).

Notemos que el valor para el brillo de la estrella  $m_i$  no depende del punto  $(x, y)$  si no de la estrella propiamente tal y éste es desconocido. Como se comentó en el capítulo anterior, sólo en casos excepcionales se conoce este valor, el cual es dado por catálogo. Sin embargo, buscamos un método de corrección para poder aplicarlo a observaciones de estrellas que seguramente no pertenecen al grupo de estrellas estándar, por lo que para cada una este valor es desconocido.

Así, considerando la aproximación polinomial descrita en la sección anterior, se tiene

$$zp(x, y) = m(x, y) - m_i = \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j(x, y). \quad (5)$$

Con el objetivo de obtener un sistema de ecuaciones que permita obtener valores apropiados para los coeficientes  $b_j$  sin involucrar los valores de las magnitudes reales para las estrellas, F. Selman [39] basa su modelo en la siguiente idea:

Al obtener una imagen con una cantidad razonable de densidad estelar y pequeños desfases entre exposiciones, cualquier error en el procedimiento Flat Field se verá reflejado en una diferencia de magnitudes estelares registradas para la misma estrella en diferentes coordenadas en la imagen.

<sup>2</sup>La cordenada  $(x, y)$  corresponde a la posición de la estrella en el campo de visión del telescopio, considerando que el campo de visión (la imagen) completo corresponde a  $[-1, 1] \times [-1, 1]$

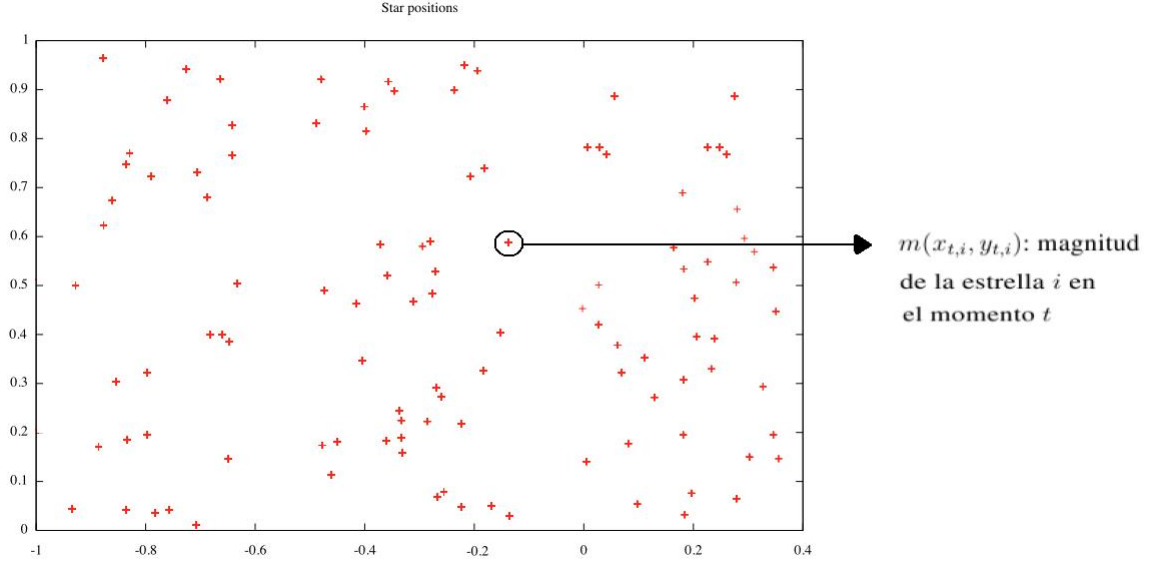


Figura 10: Representación cartesiana del campo de estrellas y su valor de magnitud fotométrica.

Consideremos imágenes desfasadas espacialmente de los mismos cúmulos de estrellas y supongamos que la imagen original corresponde al tiempo  $t = 0$  y la imagen desfasada corresponde al tiempo  $t = 1$ . Denotemos por  $(x_{i,t}, y_{i,t})$  al par ordenado correspondiente a las coordenadas de la estrella  $i$  en la imagen  $t$  (ver Figura 11). De esta forma, por (5) obtenemos

$$\begin{aligned} zp(x_{i,1}, y_{i,1}) - zp(x_{i,0}, y_{i,0}) &= m(x_{i,1}, y_{i,1}) - m_i - (m(x_{i,0}, y_{i,0}) - m_i) \\ &= m(x_{i,1}, y_{i,1}) - m(x_{i,0}, y_{i,0}) \\ &= \sum_{k=1}^n b_k (\varphi_k(x_{i,1}, y_{i,1}) - \varphi_k(x_{i,0}, y_{i,0})), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (6)$$

donde tenemos  $m$  ecuaciones, para las cuales, reescribiendo (6) de forma matricial, tenemos

$$M = A\mathbf{b} \quad (7)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} m(x_{1,1}, y_{1,1}) - m(x_{1,0}, y_{1,0}) \\ m(x_{2,1}, y_{2,1}) - m(x_{2,0}, y_{2,0}) \\ \vdots \\ m(x_{m,1}, y_{m,1}) - m(x_{m,0}, y_{m,0}) \end{bmatrix}_{m \times 1}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

y

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_{1,1}, y_{1,1}) - \varphi_1(x_{1,0}, y_{1,0}) & \varphi_2(x_{1,1}, y_{1,1}) - \varphi_2(x_{1,0}, y_{1,0}) & \dots & \varphi_n(x_{1,1}, y_{1,1}) - \varphi_n(x_{1,0}, y_{1,0}) \\ \varphi_1(x_{2,1}, y_{2,1}) - \varphi_1(x_{2,0}, y_{2,0}) & \varphi_2(x_{2,1}, y_{2,1}) - \varphi_2(x_{2,0}, y_{2,0}) & \dots & \varphi_n(x_{2,1}, y_{2,1}) - \varphi_n(x_{2,0}, y_{2,0}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_{m,1}, y_{m,1}) - \varphi_1(x_{m,0}, y_{m,0}) & \varphi_2(x_{m,1}, y_{m,1}) - \varphi_2(x_{m,0}, y_{m,0}) & \dots & \varphi_n(x_{m,1}, y_{m,1}) - \varphi_n(x_{m,0}, y_{m,0}) \end{bmatrix}_{m \times n}$$





Tenemos entonces un sistema lineal, donde  $A$ ,  $M$  son conocidos, y  $\mathbf{b}$  es el vector de coeficientes a encontrar.

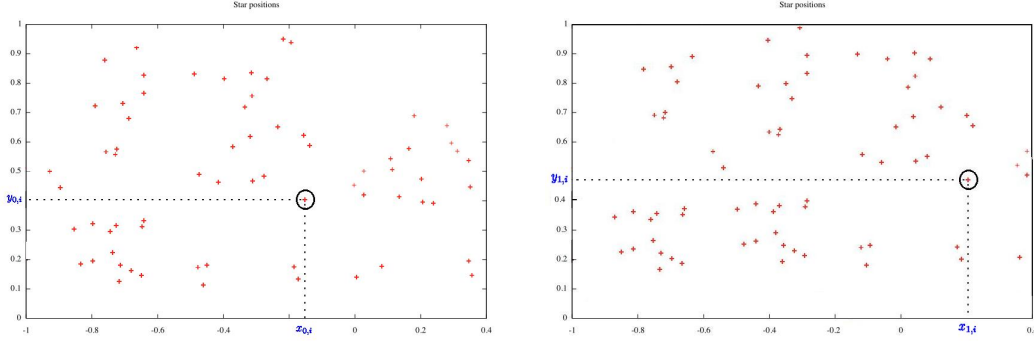


Figura 11: Representación de un subconjunto de un cúmulo de estrellas tomado en 2 imágenes con desfase.

Observemos, para todo  $1 \leq j \leq n$ ,  $j$  es el grado del polinomio  $\varphi_j$ , y  $m$  es el número de estrellas observadas, por lo que es importante notar<sup>3</sup> que  $n \ll m$ . De modo que nos encontramos con un sistema lineal sobrep parametrizado, donde la solución corresponde a la dada por el problema de optimización descrito a continuación.

## Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

Con el objetivo de obtener una solución al problema (7) se desarrollará una primera aproximación por medio del llamado método de mínimos cuadrados. Para ello consideremos previamente la siguiente definición

**DEFINICIÓN 2** Se define la  $p$ -norma para  $x \in \mathbb{R}^n$  como

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad (8)$$

y

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Además definimos la  $p$ -norma para matrices, como

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

En la Figura 12 podemos ver geoméricamente el comportamiento de las tres normas más utilizadas.

<sup>3</sup> $n$  es usualmente un número entre 3 y 20, en cambio,  $m$  del orden de los 12000

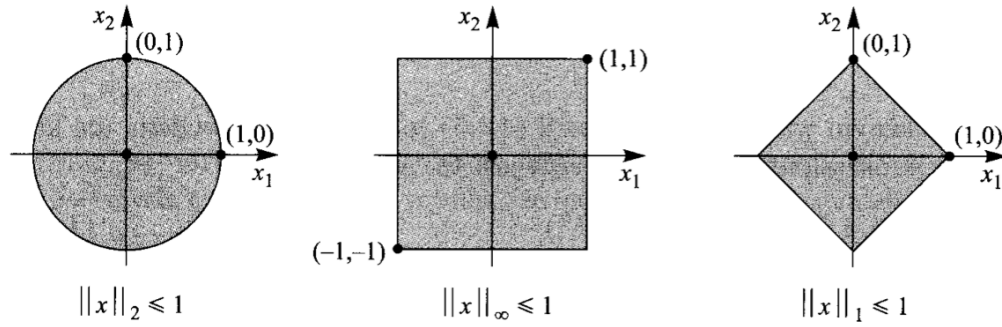


Figura 12: Interpretación Geométrica de las tres normas más utilizadas. (Fuente: [23]).

De este modo, una primera aproximación natural [39] a la solución de este problema consiste en abordar el problema de optimización

$$\min_{b \in \mathbb{R}^n} \|Ab - M\|_2^2 \quad (9)$$

de donde se obtiene la bien conocida solución de mínimos cuadrados <sup>4</sup>

$$\hat{\mathbf{b}} = (A^T A)^{-1} A^T M. \quad (10)$$

Una interesante forma de probar este resultado sigue del siguiente teorema.

**TEOREMA 3** Sea  $A$  una matriz real de  $m \times n$  y  $M$  un vector de  $m \times 1$ , entonces  $\hat{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ , dado por (10), satisface

$$A^T(M - A\hat{\mathbf{b}}) = \mathbf{0}$$

y por lo tanto, para cualquier vector  $x \in \mathbb{R}^n$ , se tiene

$$\|M - A\hat{\mathbf{b}}\|_2 \leq \|M - Ax\|_2.$$

Este resultado corresponde al Teorema 5.7.1 de [5] y su prueba es directa.

**OBSERVACIÓN:** Notemos que la matriz  $A^T A$  es una matriz pequeña de  $n \times n$ . Para que esta matriz sea invertible es necesario que las columnas de  $A^T A$  sean linealmente independientes. Por ello consideremos además el siguiente teorema.

**TEOREMA 4** El rango de  $A^T A$  es igual al rango de  $A$ .

La demostración viene directamente del hecho de que  $A^T Ax = 0$  si y solamente si  $Ax = 0$ .

De este modo, para que las columnas de  $A^T A$  sean linealmente independientes es necesario y suficiente que las columnas de  $A$  sean linealmente independientes. Considerando que  $A$  es una matriz de  $m \times n$  y que  $m \gg n$ , tenemos que es altamente

<sup>4</sup>Notar que esta solución se tiene para  $A$  matriz de rango completo, el cual corresponde a nuestro caso.

probable que así sea. No obstante, si bien la matriz  $A^T A$  es probablemente invertible, el sistema puede de alguna manera estar mal condicionado, en el sentido de que cambios pequeños en la matriz  $M$  pueden generar grandes cambios en la solución  $\hat{\mathbf{b}}$ . En relación a lo anterior, es importante asegurar qué tan fiable puede llegar a ser una solución obtenida en nuestro sistema. El análisis de este tópico se encuentra en el Capítulo 4.

En la Figura 13, podemos ver la aproximación de grado 10, mediante el modelo descrito utilizando polinomios de Chebyshev para los datos obtenidos de la observación correspondiente a la Figura 8. Este método resulta bastante útil para cielos fotométricos, sin embargo el método no contempla posibles variaciones atmosféricas que pudieran generarse entre exposiciones, por lo que en noches sin cielo fotométrico el modelo podría atribuirle las variaciones atmosféricas a los errores de flat fielding, lo que nos llevaría a resultados erróneos. Es por eso que se hace necesario perfeccionar el modelo contemplando dichas variaciones. En la siguiente sección se propone una modificación, generando un nuevo modelo que subsana dicha dificultad.

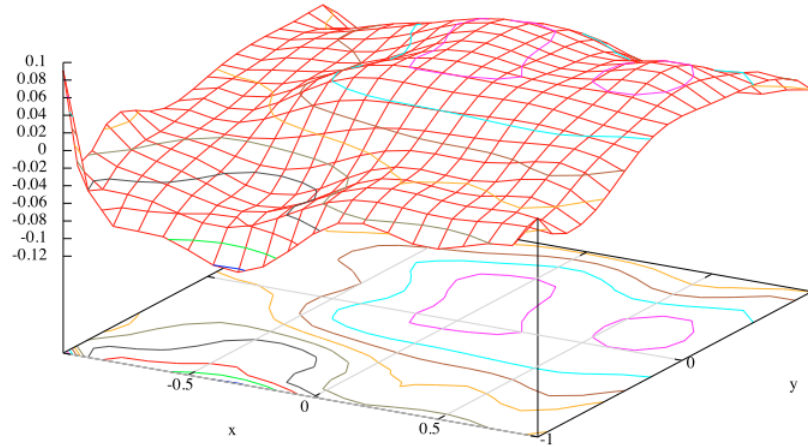


Figura 13: Aproximación polinomial de grado 10

## El nuevo modelo

Como se describe en [39], el modelo anterior fue exitosamente testeado en varios casos, sin embargo no considera las variaciones atmosféricas entre exposiciones. Esto hace que el modelo no sea robusto a todos los casos, pues requiere de un cielo fotométrico, condiciones que no siempre se tienen. Para remediar esto, se hace necesario considerar una componente adicional, que modela la presencia de perturbaciones atmosféricas entre observaciones.

Considerando la dimensión angular del campo del instrumento en comparación con la escala de variación de la transmisión atmosférica [37], geométricamente no es extraño pensar que esta componente (atmosférica) es constante en todo el plano, por lo que sólo depende del tiempo y no de la ubicación espacial. Considerando esto, replanteamos el





modelo (4) de la forma

$$zp(x_{i,t}, y_{i,t}) = m(x_{i,t}, y_{i,t}) - m_i + \delta_t \quad (11)$$

donde  $\delta_t$  corresponde a la componente correspondiente a las variaciones en la atmósfera, la cual no depende de la posición, ni de la estrella, si no sólo del momento  $t$  en que fue tomada la imagen.

Así, de forma análoga al desarrollo previo tenemos

$$\begin{aligned} zp(x_{i,1}, y_{i,1}) - zp(x_{i,0}, y_{i,0}) &= m(x_{i,1}, y_{i,1}) - m_i + \delta_1 - (m(x_{i,0}, y_{i,0}) - m_i + \delta_0) \\ &= m(x_{i,1}, y_{i,1}) - m(x_{i,0}, y_{i,0}) + \delta_1 - \delta_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Una posible forma de abordar este problema es eliminando las variables desconocidas  $\delta_1$  y  $\delta_0$  restando la ecuación (12) para 2 estrellas  $i, j$  distintas. De este modo tenemos

$$\begin{aligned} zp(x_{i,1}, y_{i,1}) - zp(x_{i,0}, y_{i,0}) - (zp(x_{j,1}, y_{j,1}) - zp(x_{j,0}, y_{j,0})) &= \\ = m(x_{i,1}, y_{i,1}) - m(x_{i,0}, y_{i,0}) + \delta_1 - \delta_0 - (m(x_{j,1}, y_{j,1}) - m(x_{j,0}, y_{j,0}) + \delta_1 - \delta_0) &= \\ = m(x_{i,1}, y_{i,1}) - m(x_{i,0}, y_{i,0}) - (m(x_{j,1}, y_{j,1}) - m(x_{j,0}, y_{j,0})) \end{aligned} \quad (13)$$

De esta forma, utilizando nuevamente la aproximación polinomial obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} m(x_{i,1}, y_{i,1}) - m(x_{i,0}, y_{i,0}) - (m(x_{j,1}, y_{j,1}) - m(x_{j,0}, y_{j,0})) &= \\ = \sum_{k=1}^l b_k (\varphi_k(x_{i,1}, y_{i,1}) - \varphi_k(x_{i,0}, y_{i,0}) - (\varphi_k(x_{j,1}, y_{j,1}) - \varphi_k(x_{j,0}, y_{j,0}))) \end{aligned} \quad (14)$$

donde nuevamente nos queda un modelo de la forma

$$M = A\mathbf{b} \quad (15)$$

Con  $M$  y  $A$  conocidas. Notemos que la dimensión de  $M$  y  $A$  depende del número de pares de estrellas que se tomen en las diferencias (14). Tomar todos los pares posibles de estrellas no es conveniente pues la matriz  $A$  tendría  $n^2$  filas, lo que incrementaría radicalmente el costo computacional de todo el proceso.

Existen además dos razones físicas adicionales para filtrar el número de pares de estrellas, estas razones se explican en los siguientes criterios utilizados simultáneamente en la selección de estrellas:

- En la Figura 15 se puede ver una relación entre el error de medición (el cual es dado por el procedimiento fotométrico descrito en el capítulo 2) asociado a la magnitud estelar de cada estrella. Ahí podemos ver que existe una relación entre ambas variables. Esto tiene sentido físico, basado en la idea que estrellas menos

brillantes (magnitudes mas grandes) entregan datos menos precisos. En base a esto, se filtraron estrellas por orden de magnitudes, dejando de lado las estrellas muy poco brillantes, es decir, estrellas con una magnitud muy grande. Esto con el objetivo de disminuir el ruido en nuestro conjunto de datos.

- El segundo filtro se aplicó en base a pares de estrellas, dejando solamente las estrellas con órdenes de magnitudes cercanos. Este filtro se aplicó en base a la idea que al restar estrellas con magnitudes muy distintas, una de las dos se torna despreciable en cuando a la otra generando nada más que ruido adicional al restarlas.

Antes de revisar la implementación de los métodos consideremos la siguiente observación: En el caso del primer modelo, al realizar la diferencia de magnitudes inevitablemente se pierde información sobre el término constante del polinomio, sin embargo al ser precisamente constante, no depende del punto en el plano y la diferencia se iguala a cero, por lo que no presenta inconveniente. Para el caso del segundo modelo este hecho si tiene consecuencias, pues no solo se pierde información para el coeficiente constante si no que también para todos los coeficientes que acompañan a términos lineales. Para aclarar este hecho consideremos el polinomio de segundo grado <sup>5</sup>

$$p(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2.$$

Al realizar las restas para la ecuación (14) nos queda

$$\begin{aligned} p(x_{i,1}, y_{i,1}) - p(x_{i,0}, y_{i,0}) - (p(x_{i,1}, y_{i,1}) - p(x_{i,0}, y_{i,0})) = \\ = a_1 + a_2x_{i,1} + a_3y_{i,1} + a_4x_{i,1}y_{i,1} + a_5x_{i,1}^2 + a_6y_{i,1}^2 \\ - (a_1 + a_2x_{i,0} + a_3y_{i,0} + a_4x_{i,0}y_{i,0} + a_5x_{i,0}^2 + a_6y_{i,0}^2) \\ - (a_1 + a_2x_{j,1} + a_3y_{j,1} + a_4x_{j,1}y_{j,1} + a_5x_{j,1}^2 + a_6y_{j,1}^2) \\ - (a_1 + a_2x_{j,0} + a_3y_{j,0} + a_4x_{j,0}y_{j,0} + a_5x_{j,0}^2 + a_6y_{j,0}^2) \\ = a_2(x_{i,1} - x_{i,0} - (x_{j,1} - x_{j,0})) + a_3(y_{i,1} - y_{i,0} - (y_{j,1} - y_{j,0})) + tos \end{aligned} \quad (16)$$

donde *tos* denota los términos de orden superior. Ahora, notemos que

$$x_{i,1} - x_{i,0} - (x_{j,1} - x_{j,0}) = x_{i,1} - x_{j,1} - (x_{i,0} - x_{j,0})$$

pero como la distancia entre la estrella *i* y la estrella *j* no depende de *t* tenemos que

$$x_{i,1} - x_{j,1} = x_{i,0} - x_{j,0}$$

por lo que

$$x_{i,1} - x_{i,0} - (x_{j,1} - x_{j,0}) = 0$$

y de forma análoga,

$$y_{i,1} - y_{i,0} - (y_{j,1} - y_{j,0}) = 0.$$

---

<sup>5</sup>Para cualquier grado superior el hecho se extiende de forma directa.



---

De aquí concluimos que el segundo método genera una pérdida de información en cuanto a los términos lineales de los polinomios. Sin embargo, los teoremas 1 y 2 de todas formas aseguran una buena aproximación con polinomios linealmente independientes sin términos lineales.



## Implementación

En la Figura 14 podemos observar un diagrama general <sup>6</sup> del procedimiento de obtención de  $zp(x, y)$ . Este sigue básicamente los siguientes pasos:

1. Desde la imagen obtenida por el telescopio se efectúa el procedimiento de fotometría descrito en el Capítulo 1.
2. A partir de este procedimiento obtienen datos  $\{(x_{i,t}, y_{i,t}), m(x_{i,t}, y_{i,t}), i\}$  correspondientes a posiciones de las estrellas  $i = \{1, 2, \dots, n\}$  en los momentos  $t = \{0, 1\}$ , magnitudes fotométricas obtenidas para cada estrella en cada momento, y la identificación de cada estrella. Además se obtienen los errores asociados a la medición de cada estrella, los que se obtienen mediante el mismo proceso fotométrico.
3. A partir de estos datos fotométricos, se efectúa el mapeo por medio de la base de funciones  $\{\varphi_j(x, y)\}_{j=1}^n$  con el que se genera la matriz  $A$  y se realizan las diferencias de las magnitudes fotométricas a utilizar, generando el vector  $M$  por medio de (7).
4. Luego, se obtiene la solución  $\mathbf{b}$  de coeficientes (por el momento, mediante MCO).
5. Finalmente, con estos coeficientes se obtiene una aproximación a la función de variación de punto cero.

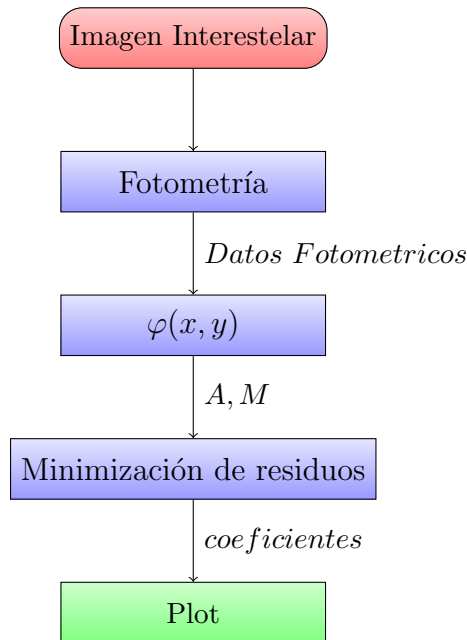


Figura 14: Diagrama del procedimiento de obtención de variación del punto cero.

<sup>6</sup>Notar que este diagrama es tanto para el método 1 como el método 2, estos difieren en la forma en que se generan  $A$  y  $M$ , pero funcionan con el mismo procedimiento, el cual se describe en el diagrama 14.

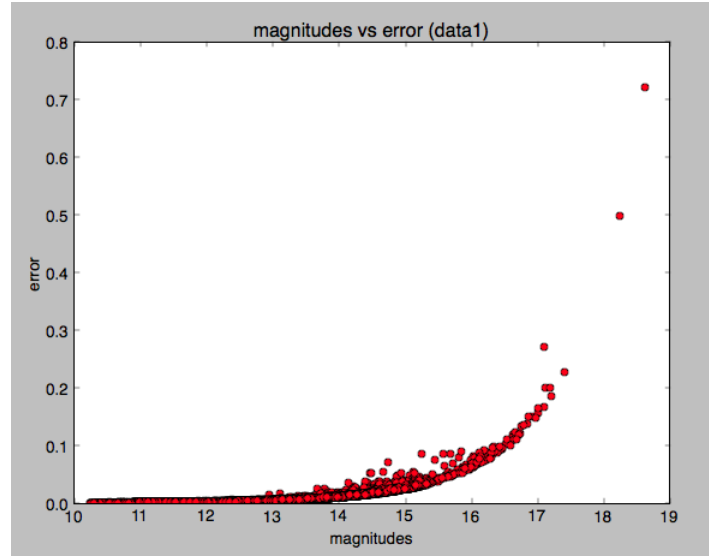


Figura 15: Relación de magnitudes estelares versus el error de medición entregado por fotometría. Cada punto corresponde a una estrella de la Figura 8.

En base al procedimiento descrito utilizando  $M$  y  $A$  dados por el método 2, y los filtros señalados anteriormente, se obtuvieron las aproximaciones polinomiales para el conjunto de estrellas test, imagen correspondiente a un cielo fotométrico en donde el método 1 es efectivo.

Se procedió a implementar dicho algoritmo por medio de paquetes científicos python [12, 26]. Para bajo grados polinomiales se obtuvieron resultados satisfactorios, en el sentido de que los coeficientes de la función de variación de punto cero que entrega el método 2 son los mismos que los entregados por el método 1 los cuales fueron validados en trabajos anteriores [39]. Sin embargo, a medida que se aumenta el grado aparecen tendencias ajenas a lo esperado. Este comportamiento fue previsto en observaciones anteriores y es abordado en el siguiente capítulo.

En la Figura 16 podemos observar una aproximación de grado 5 por medio de ambos métodos. En dicha aproximación se obtuvieron coeficientes similares para el polinomio reproduciendo para el método 2 los mismos niveles de corrección previamente obtenidos en [39]. Este hecho satisface las expectativas pues logra una corrección adecuada con un modelo mas general, el cual permite ser aplicado a cielos con variaciones atmosféricas, lo que previamente no era posible.

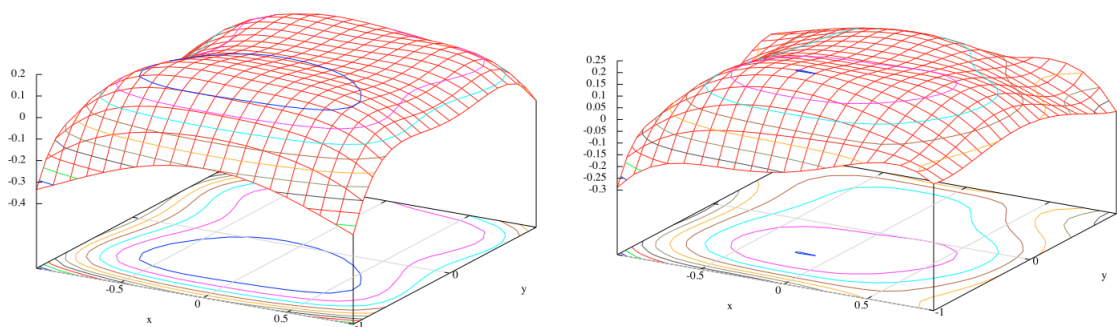


Figura 16: Aproximación de grado 5 mediante el primer método (a la izquierda), y el método de diferencias de diferencias (a la derecha) para los datos de la Figura 8.





# Capítulo 4

## Condicionamiento del sistema

“ Nobody wants to read anyone else’s formulas.

”

---

Finman’s Law,

Si bien el método de mínimos cuadrados ordinario da buenos resultados, en muchos casos este método no es robusto. Esto es debido a que muchas veces el sistema puede estar mal condicionado, en el sentido de que cambios muy pequeños en la matriz de diseño pueden entregar soluciones muy diferentes. Tomando en cuenta que trabajamos con magnitudes fotométricas, las cuales están constantemente afectadas a errores de medición, se hace necesario implementar un método que subsane estas dificultades.

**DEFINICIÓN 3** Decimos que, para una matriz de rango completo  $A$  de  $m \times n$  y un vector  $b \in \mathbb{R}^n$ , el problema

$$\min_{b \in \mathbb{R}^n} \|Ab - M\|_2^2 \quad (17)$$

está **bien condicionado** en el sentido de Tikhonov si:

1. La solución  $b \in \mathbb{R}^n$  existe;
2. La solución es única;
3. Variaciones infinitamente pequeñas en  $M$  conducen a variaciones infinitamente pequeñas en la solución  $b$ .

*observación:* Las condiciones 1 y 2 se cumplen siempre que la matriz  $A$  sea de rango completo [16].





## El número de condicionamiento

### Motivación

Como se comenta en el capítulo anterior, si bien la matriz  $A$  del sistema (9) es de rango completo, es importante saber en alguna medida "que tan cerca de no ser de rango completo" está. Concretamente, interesados en resolver el sistema  $Ab = M$  queremos estudiar como afecta la solución si se perturban los datos ingresados (*input*)  $A$  y  $M$ . Turing [45] introdujo el llamado *numero de condición*, el cuál da una idea formal de la sensibilidad de un sistema respecto a sus datos de entrada.

### Formalización

Para las normas matriciales y vectoriales descritas en el capítulo anterior tenemos la siguiente propiedad [16] la cual utilizaremos en el teorema principal de esta sección

**LEMA 1** *Para cualquier vector  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , matriz  $A$  y cualquier norma  $\|\cdot\|_p$ , tenemos*

$$\|A\mathbf{x}\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|\mathbf{x}\|_p$$

Volviendo a nuestro problema original, consideremos el sistema

$$Ab = M.$$

En nuestro caso, como en muchos otros casos de ingeniería, los coeficientes del vector  $M$  se encuentran sujetos a errores (pues estos corresponden a mediciones fotométricas de las magnitudes estelares). Teniendo en cuenta esto es de esperar que nuestro método considere dichos errores, es decir, que cambios pequeños en el vector  $M$  reflejen pequeños cambios en la solución del problema  $b$  (que en nuestro caso corresponden a los coeficientes de la aproximación polinomial). De otra forma no podemos confiar en nuestra solución.

Para esto Turing [45] en 1947 definió el número de condición. La definición de este número, para el caso de matrices cuadradas no singulares, viene formalmente motivada por el siguiente teorema <sup>7</sup>.

**TEOREMA 5** *Consideremos el sistema de ecuaciones lineales*

$$Ab = M$$

*Si llamamos  $\delta M$  al error de medición en  $M$  y  $\delta b$  la perturbación en la solución de (5) entonces*

$$\frac{\|\delta b\|_p}{\|b\|_p} \leq \kappa_p(A) \frac{\|\delta M\|_p}{\|M\|_p}, \quad \forall A \in \mathbb{M}^{n \times n}, \quad \forall M \in \mathbb{R}^n$$

*Donde  $\kappa_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$  corresponde al numero de condicionamiento de la matriz  $A$ .*

---

<sup>7</sup>Este teorema es una adaptación al teorema presentado por Turing para nuestro caso en particular



*Demostración:* Por definición tenemos que

$$A(b + \delta b) = M + \delta M$$

como  $b$  es la solución del sistema de ecuaciones lineales  $Ab = M$  entonces

$$A \cdot \delta b = \delta M \implies \delta b = A^{-1} \cdot \delta M.$$

Tomando norma en ambos lados y usando el Lema 1,

$$\|\delta b\|_p = \|A^{-1} \cdot \delta M\|_p \leq \|A^{-1}\|_p \|\delta M\|_p$$

Por otro lado

$$Ab = M \iff \|A\|_p \cdot \|b\|_p \geq \|M\|_p \iff \|b\|_p \geq \|M\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$$

Entonces se tiene que el error relativo

$$\frac{\|\delta b\|_p}{\|b\|_p} \leq \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p \frac{\|\delta M\|_p}{\|M\|_p} = \kappa_p(A) \frac{\|\delta M\|_p}{\|M\|_p},$$

lo que prueba el resultado.  $\square$

Notemos que este resultado es precisamente lo que nos da el control de cuando estamos dispuestos a ceder en relación a la solución de nuestro problema, en el sentido de que tenemos una cota para el error de nuestra solución en base al número de condicionamiento de la matriz  $A$  y lo errores del vector  $M$ . Así, decimos que un sistema está *bien condicionado* si su número de condición es suficientemente pequeño para que la cota dada por el teorema anterior entregue variaciones razonables en la solución. En caso contrario (número de condición muy grande) decimos que el sistema está *mal condicionado*.

En este sentido se hace necesario tener controlado el número de condición de las matrices con las que trabajamos, ya que esto nos da una idea de que error estamos cometiendo en nuestra estimación.

Para el caso de sistemas sobredeterminados (la matriz  $A$  ya no es cuadrada), el resultado se extiende de forma natural, haciendo uso de la pseudoinversa Moore-Penrose [27, 30] definida como <sup>8</sup>

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T.$$

De esta forma, extendemos (a matrices rectangulares) la definición al número de condición [18] como

$$\kappa_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^\dagger\|_p.$$

---

<sup>8</sup>Notar que la solución del problema de mínimos cuadrados utilizada en el capítulo anterior corresponde precisamente a  $\mathbf{b} = A^\dagger M$ .

## OBSERVACIONES:

Notemos que el número de condición  $\kappa_p(\cdot)$  depende de la norma a utilizar. Para el caso abordado hasta este momento (mínimos cuadrados) tenemos que el número de condición corresponde ([16]) a

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)} \quad (18)$$

donde  $\sigma_1(A)$  y  $\sigma_n(A)$  son los valores singulares mayor y menor de la matriz  $A$ , respectivamente.

En general para otras normas (en el capítulo siguiente se abordará el caso de la minimización con la norma  $\|\cdot\|_1$ ) podemos encontrar algunas otras caracterizaciones, como por ejemplo la desarrollada en [21], donde tenemos que para la norma  $\|\cdot\|_p$

$$\frac{1}{\kappa_p(A)} = \min_{(A+\Delta \in NRC)} \frac{\|\Delta A\|_p}{\|A\|_p}$$

donde definimos  $NRC$  como al conjunto de todas las matrices que no son de rango completo.

Esta caracterización muestra que  $\kappa_p(A)$  mide la distancia (relativa a la norma  $\|\cdot\|_p$ ) de  $A$  al conjunto  $NRC$ . Esta es precisamente la motivación explicada al principio de este capítulo, en donde, si bien la matriz es de rango completo, ella puede arrojar errores similares a matrices en  $NRC$ , de acuerdo a su "cercanía" con dicho conjunto de matrices. Para una caracterización a normas mas generales se puede consultar [31].

Si bien lo anterior muestra caracterizaciones distintas a (18) para otro tipo de normas, muchas veces esta definición es suficiente. Esto se basa en el hecho de que para espacios de dimensión finita ( $\mathbb{R}^n$ ) todas las normas son equivalentes. Así, tenemos como ejemplo las siguientes tres relaciones

$$\frac{1}{n}\kappa_2(A) \leq \kappa_1(A) \leq n\kappa_2(A) \quad (19)$$

$$\frac{1}{n}\kappa_\infty(A) \leq \kappa_2(A) \leq n\kappa_\infty(A) \quad (20)$$

$$\frac{1}{n^2}\kappa_1(A) \leq \kappa_\infty(A) \leq n^2\kappa_1(A). \quad (21)$$

En particular la ecuación (19) da una relación de las normas con las que se aborda el problema en este trabajo.

Continuando con el análisis de nuestros datos test, se computó el número de condición para las distintas matrices correspondientes a polinomios de grados entre 5 y 15 para el primer modelo presentado (modelo 1) y para el modelo que contempla las variaciones atmosféricas (modelo 2). Un gráfico del comportamiento del número de condición versus el grado del polinomio se puede apreciar en la Figura 17. Aca podemos observar lo que se suponía previamente:



1. El número de condición aumenta con el grado del polinomio;
2. El número de condición para el modelo de diferencias de diferencias es mucho mayor al del primer modelo.

Estos hechos se relacionan totalmente con los resultados mencionados en el capítulo anterior, donde se obtubieron curvas sin sentido físico para polinomios de orden mayor.

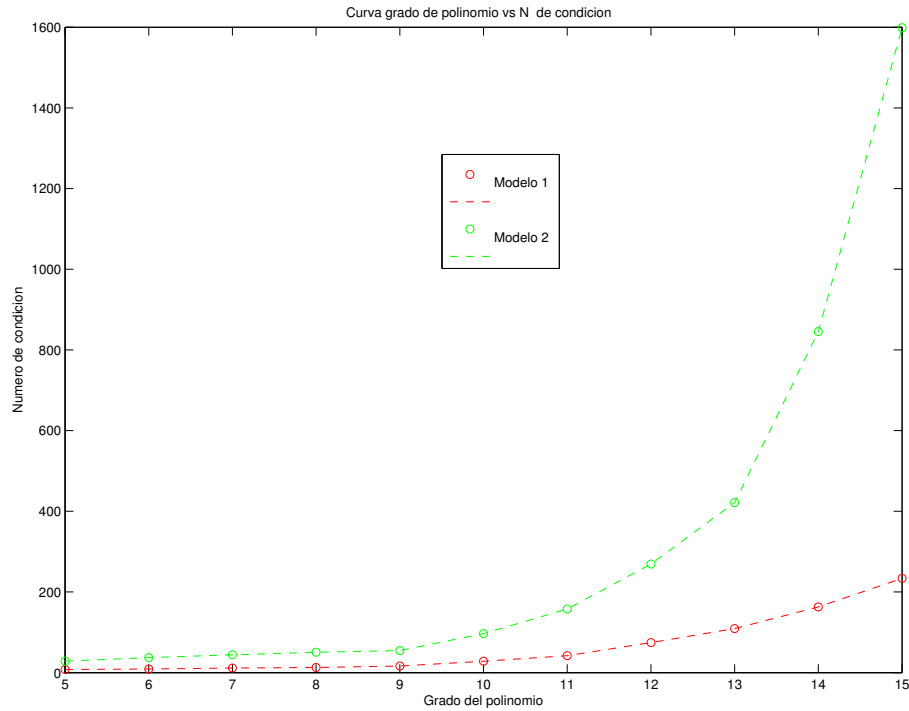


Figura 17: Gráfico del Número de Condición vs grado de polinomio para ambos modelos. Aca podemos ver el sistema se malcondiciona notablemente mas rápido para el modelo 2.

## Regularización por medio de valores singulares truncados

Con el objetivo de subsanar el problema de condicionamiento previamente detectado, se analiza la naturaleza de dicho mal condicionamiento. Del número de condición dado por la ecuación (18) podemos observar que para valores muy pequeños del menor valor singular en relación al mayor valor singular, el sistema se mal condiciona. En base a esta idea revisaremos resultados previos para luego establecer un método de regularización consistente. El desarrollo de este método se basa en la (bien conocida) descomposición en valores singulares. En lo que sigue se verán resultados necesarios para obtener un método regularizador para nuestro problema en particular. Una visión introductoria pero más completa del tema se puede encontrar en [43].

**TEOREMA 6** Si  $A$  es una matriz real de  $m \times n$ , entonces<sup>9</sup> existen matrices ortogonales

$$U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad y \quad V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

tales que

$$U^T A V = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad p = \min\{m, n\}$$

donde  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ .

La demostración de este teorema puede ser encontrada en [16].

De esta forma, tenemos que para  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , la matriz obtenida en (15) (o en (7) dependiendo del modelo a utilizar), la descomposición en valores singulares (SVD) tiene la forma

$$A = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T, \quad (22)$$

con  $U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices ortonormales, y  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , para  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$  valores singulares de  $A$ .

Del mismo modo, la expresión para la pseudo-inversa corresponde a

$$A^\dagger = \sum_{i=1}^{\text{Rango}(A)=n} v_i \sigma_i^{-1} u_i^T$$

Notemos que para el caso de matriz cuadrada e invertible se tiene  $A^\dagger = A^{-1}$ , por lo que este desarrollo contempla sistemas cuadrados con matrices no singulares.

Luego, podemos escribir la solución de MCO obtenida en el capítulo anterior como

$$\mathbf{b} = A^\dagger M = \sum_{i=1}^{\text{Rango}(A)=n} \frac{u_i^T M}{\sigma_i} v_i \quad (23)$$

De aquí podemos observar la influencia que tienen los valores singulares en la solución del sistema para el método de mínimos cuadrados. En el caso de que la matriz no tenga rango completo (y por lo tanto no tenga rango completo), la solución simplemente está dada por la sumatoria (23) hasta el número del rango, es decir, realizando la suma sobre todos los valores singulares mayores que cero. Sin embargo, como se comentó en el capítulo anterior, en la práctica la matriz  $A$  es de rango completo, aunque en muchos casos es numéricamente "cercana" a no serlo (mal condicionada), es decir  $r_\epsilon < n$  donde  $r_\epsilon$  es la cantidad de valores singulares mayores que  $\epsilon$ , para  $\epsilon$  pequeño<sup>10</sup>. Por el análisis previo, esta situación inevitablemente conlleva a dificultades numéricas. Notemos que si tomamos norma en ambos lados de la ecuación (23) tenemos (utilizando la ortonormalidad de los vectores  $v_i$ ) que

<sup>9</sup>Denotamos al conjunto de las matrices reales de tamaño  $m \times n$  como  $\mathbb{R}^{m \times n}$

<sup>10</sup>Notemos que por (18) el sistema está bien condicionado si  $r_\epsilon = n$  para  $\epsilon$  grande.

$$\|\mathbf{b}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\text{Rango}(A)=n} \left( \frac{u_i^T M}{\sigma_i} \right)^2, \quad (24)$$

por lo tanto, para  $\sigma_i$  muy pequeños  $\|\mathbf{b}\|_2$  es muy grande, a menos que  $M$  se encuentre cercano a ser linealmente dependiente a las columnas de  $A$ , o formalmente, que los últimos  $n - r_\epsilon$  coeficientes  $u_i^T M$  satisfagan

$$|u_i^T M| < \sigma_i. \quad (25)$$

Sin embargo, para vectores  $M$  con presencia de errores (como es nuestro caso), es muy poco probable que esto se satisfaga, y la solución  $\mathbf{b}$  es por lo tanto dominada por los últimos  $n - r_\epsilon$  componentes de la descomposición SVD utilizada para (23).

En base a estas ideas, en [20] y principalmente en [47] se propone un método de regularización considerando las matrices

$$A_k = \sum_{i=1}^{k=r_\epsilon} u_i \sigma_i v_i^T, \quad (26)$$

es decir, reemplazando los valores  $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n$  por ceros. Esta sustitución es respaldada por el siguiente teorema (consecuencia directa del Teorema 2.5.3 de [16])

**TEOREMA 7** *Sea  $M_k$  el conjunto de todas las matrices de rango  $k$ , y sea  $A$  la matriz de nuestro sistema lineal definida en (22). Entonces la matriz  $A_k$  definida en (26) es solución del problema*

$$\min_{Z \in M_k} \|A - Z\|_2^2 \quad (27)$$

Es lógico además pensar en la elección de  $k$  como  $k = r_\epsilon$ , esto pues  $k < r_\epsilon$  conduce a una pérdida de la información asociada a valores singulares grandes, y si  $k > r_\epsilon$  incluimos valores singulares pequeños, los cuales por lo visto durante este capítulo, se traducen en un mal condicionamiento del sistema.

Así, como consecuencia del análisis desarrollado en este capítulo, se propone un método de regularización como una forma de abordar la problemática asociada a la implementación del segundo modelo aplicado a la corrección fotométrica. Este se basa en la sustitución numérica de  $A$  por la ecuación (26), obteniendo así la solución alternativa

$$\mathbf{b} = A_k^\dagger M = \sum_{i=1}^{r_\epsilon} \frac{u_i^T M}{\sigma_i} v_i. \quad (28)$$

Este método es conocido como *descomposición en valores singulares truncados*<sup>11</sup>.

Una visión global de éste y otros métodos de regularización, en especial los llamados métodos de Tikhonov, aplicados a sistemas sobredeterminados puede ser encontrada en [19].

---

<sup>11</sup>La elección de  $\epsilon$  usualmente se escoge en relación a los valores singulares del sistema en particular.

## Aplicación

En base a la teoría descrita se implementaron los algoritmos correspondientes al método 2. La figura 18 muestra las aproximaciones polinomiales de la función de variación de punto cero correspondiente a polinomios de grados entre 3 y 14. A simple vista podemos ver un comportamiento natural para algunos polinomios, no obstante existen en muchos casos comportamientos incongruentes en las esquinas, tal como habíamos apreciado en la figura 13. Este tipo de comportamientos se traducen concretamente en incrementos inusuales en algún coeficiente de la aproximación polinomial, es decir en la solución del problema de optimización (9) gatillados en muchos casos por la presencia de outliers propios de la naturaleza de los datos fotométricos. Este tópico se aborda en el siguiente capítulo.

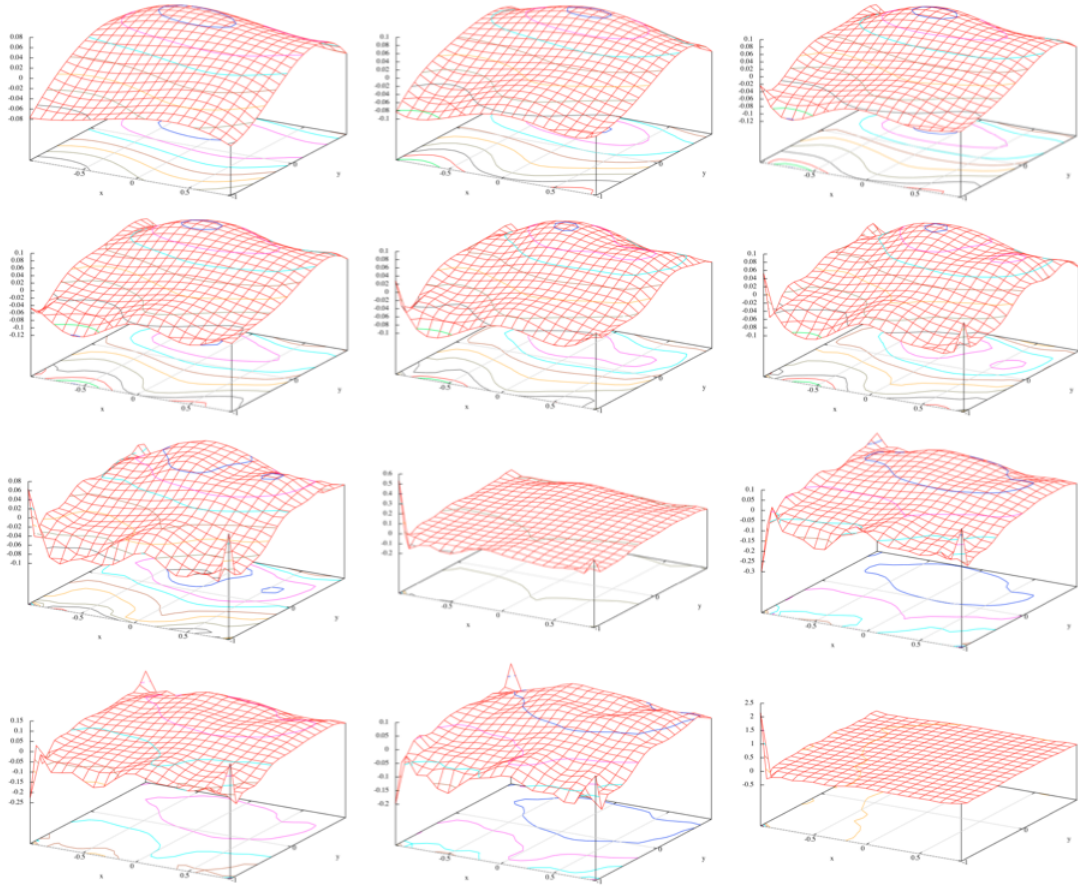


Figura 18: Aproximaciones de grados 3 a 14 mediante el método de diferencias de diferencias para los datos test (imagen 8). En la esquina superior izquierda se encuentra la aproximación polinomial de grado 3, a su derecha la aproximación de grado 4 y así sucesivamente hasta la aproximación de grado 14 en la esquina inferior derecha.







# Capítulo 5

## Minimización para la norma $l_1$

“ Todo lo que se funda en la fuerza es frágil y denota la ausencia de ingenio ”

---

Charles Fourier,

Los métodos anteriormente implementados, con el norte de reducir los residuos, buscan solucionar el problema

$$\min_{b \in \mathbb{R}^n} \|Ab - M\|_2^2 \quad (29)$$

En este capítulo, se propone como alternativa reducir los residuos en el sentido de la norma  $l_1$ , es decir, utilizar la solución del problema

$$\min_{b \in \mathbb{R}^n} \|Ab - M\|_1. \quad (30)$$

### Motivación

Si bien el método de mínimos cuadrados en general es útil en problemas sobredeterminados (incluyendo este), en muchos casos la solución obtenida por (30) es preferible. Podemos ver, por ejemplo en la Figura 13, donde la solución para (29) da una aproximación polinomial que presenta un comportamiento inusual alrededor del punto  $(x, y) = (-1, -1)$ . Claramente este comportamiento no tiene ningún sentido físico (fotométrico).

Los datos fotométricos están afectados a una variedad de errores tales como, rayos cósmicos, defectos en el silicio que daña alguno de los foto receptores, transientes electrónicos, reflexiones internas, imágenes fantasmas de estrellas brillantes que afectan la medición de solo algunas estrellas, etc. Todas estas fuentes de errores implicarán que toda lista de mediciones fotométricas contendrán un número significativo de outliers, los que afectan directamente la estimación de los parámetros de la función de variación del punto cero.



Una alternativa para solucionar problemas de outliers es precisamente minimizar en relación a la norma  $l_1$ . Para ver esto consideremos  $A = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_m]^T$  donde  $a_i$  es un vector fila en  $\mathbb{R}^n$ , y  $M = [M_1, M_2, \dots, M_m]^T \in \mathbb{R}^m$ . Así, por la ecuación (8), tenemos

$$\|Ab - M\|_1 = |\langle a_1, b \rangle - M_1| + |\langle a_2, b \rangle - M_2| + \dots + |\langle a_m, b \rangle - M_m| \quad (31)$$

y

$$\|Ab - M\|_2^2 = (\langle a_1, b \rangle - M_1)^2 + (\langle a_2, b \rangle - M_2)^2 + \dots + (\langle a_m, b \rangle - M_m)^2 \quad (32)$$

Si para algún  $j$ ,  $M_j$  es outlier, podemos suponer que  $|\langle a_j, x \rangle - M_j| \gg 1$  lo que implica  $|\langle a_j, x \rangle - M_j| \ll (\langle a_j, x \rangle - M_j)^2$ . Podemos ver entonces que el modelo (29) se ve mas afectado que el modelo (30) debido a su carácter cuadrático. Una visión estadística de este hecho se puede encontrar en [24]. Una representación gráfica se puede ver en las Figuras 19 y 20 tomadas de [11] y [9] respectivamente.

Tomando en cuenta además, que los datos fotométricos están sujetos a errores, y seguramente cuentan con outliers, se propone implementar el modelo (30).

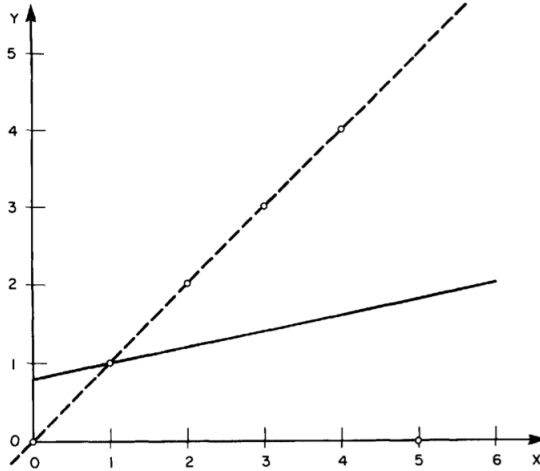


Figura 19: Línea punteada para norma  $l_1$  y línea continua mínimos cuadrados. Los puntos blancos representan los datos. (imagen tomada de [11])

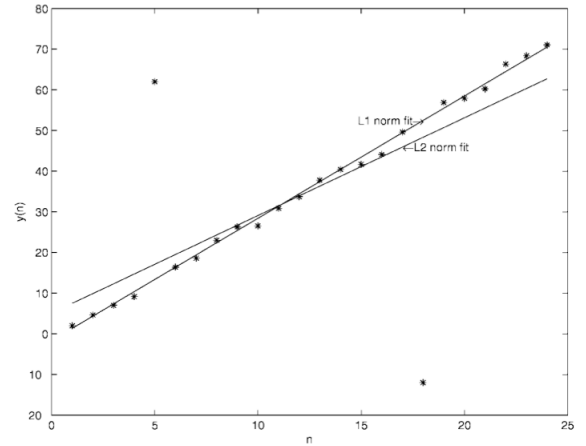


Figura 20: Aproximación mediante los 2 métodos distintos. Los puntos negros representan los datos. (imagen tomada de [9])

## Definiciones y resultados previos

**DEFINICIÓN 4** Decimos que la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función convexa si

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**PROPOSICIÓN 1** La función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(b) = \|b\|_1 \end{aligned}$$



es una función convexa.

Demostración: Por desigualdad triangular y linealidad de la norma

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \|\alpha x + (1-\alpha)y\|_1 \leq \alpha\|x\|_1 + (1-\alpha)\|y\|_1 = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \quad \square$$

De esta forma, considerando que el análisis aquí planteado tiene como objetivo la norma  $l_1$ , consideraremos en lo que resta del capítulo que  $f$  es una función convexa para todos los resultados, a menos de que se mencione lo contrario.

**DEFINICIÓN 5** Decimos que el vector  $g \in \mathbb{R}^n$  es un **subgradiente** de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en  $b_0 \in \mathbb{R}^n$  si para todo  $b \in \mathbb{R}^n$

$$f(b) \geq f(b_0) + \langle g, b - b_0 \rangle \quad (33)$$

Observación: Si  $f$  es convexa y diferenciable entonces su gradiente en  $b$  es el subgradiente. Sin embargo, el subgradiente puede existir aunque la función  $f$  no sea diferenciable como se muestra en la Figura 21.

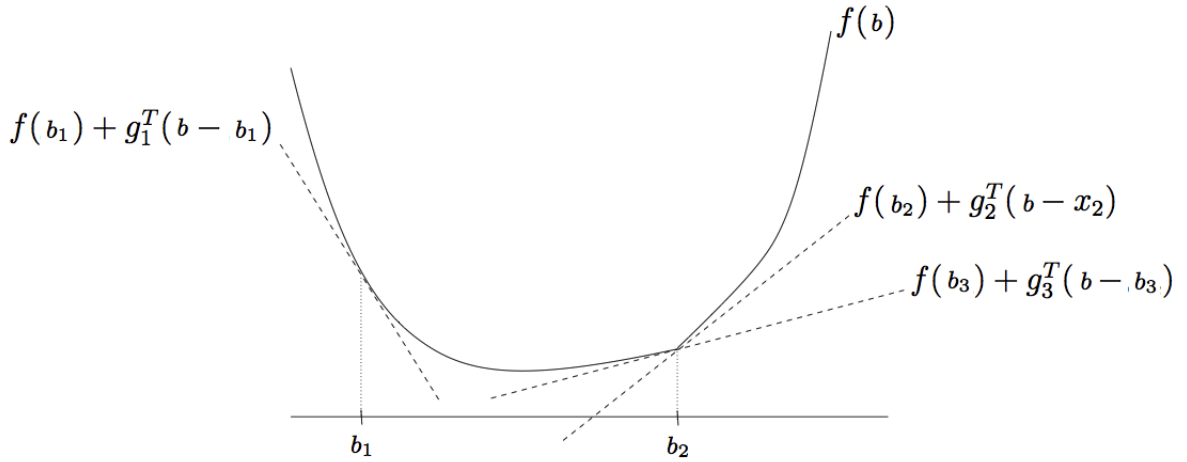


Figura 21: En el punto  $b_1$  la función  $f$  es diferenciable y su subgradiente es igual a su gradiente. En el punto  $b_2$  la función no es diferenciable y tiene muchos subgradienes. (imagen obtenida de [7]).

**DEFINICIÓN 6** El conjunto de todos los subgradienes de  $f$  en  $b$  es llamado el subdiferencial de  $f$  en  $b$ , y es denotado como  $\partial f(b)$ .

Veamos un ejemplo de nuestro problema para el caso  $b \in \mathbb{R}$ .

**EJEMPLO 1** Consideremos la norma  $l_1$  en una dimensión, es decir  $f(b) = |b|$ . Claramente para  $b \neq 0$  el subgradiente es único  $\partial f(b) = \text{sign}(b) = \frac{b}{|b|}$ . Para  $b = 0$  tenemos que el subdiferencial son todos los  $g$  que cumplen  $|b| \geq g|b|$ , para cualquier  $b \in \mathbb{R}$ , de este modo  $\partial f(0) = [-1, 1]$  (ver Figura 22).



**TEOREMA 8** Si  $f$  es convexa y  $b \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\partial f(b)$  es un conjunto no vacío y acotado.

La demostración se puede encontrar en [7].

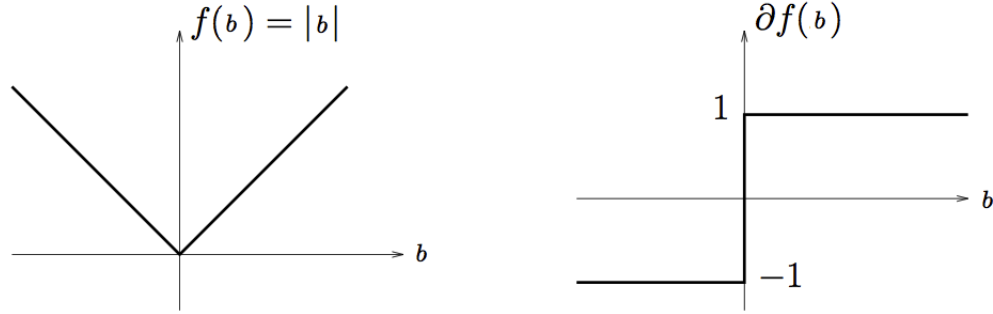


Figura 22: Figura tomada de [7]

**DEFINICIÓN 7**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice coerciva si

$$\lim_{\|b\| \rightarrow +\infty} f(b) = +\infty$$

**PROPOSICIÓN 2** Para cualquier matriz  $A$  de rango completo, la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ b &\longmapsto f(b) = \|Ab - M\|_1 \end{aligned}$$

es una función coerciva.

La demostración viene directamente de la definición de coercividad al separar  $\|Ab - M\|_1$  en una suma de valores positivos, hacer una coordenada tender al infinito considerando la norma  $\|\cdot\|_\infty$ <sup>12</sup>.

De este modo, tenemos las herramientas para demostrar que el problema (30) siempre tiene solución:

**TEOREMA 9** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y coerciva, entonces existe un punto  $b^* \in \mathbb{R}^n$  que minimiza  $f$ , i.e.,  $f(b^*) = \min_{b \in \mathbb{R}^n} f(b)$ .

Demostración: El resultado es consecuencia directa del teorema de Weierstrass-Hilbert-Tonelli (ver por ejemplo Teorema 1.2.1 en [1])  $\square$

Luego el problema (30) siempre tiene solución.

De este modo, estamos interesados en aplicar un método capaz de llegar lo mas cercano posible a la solución de (30) para cualquier matriz rectangular  $A$  y vector

<sup>12</sup>Tomar en cuenta que en  $\mathbb{R}^n$  todas las normas son equivalentes, para más detalles sobre este hecho consultar [36]



$M$ . En vista de que nos encontramos con una función no diferenciable, no es posible aplicar métodos estándar de optimización numérica, tales como máximo descenso, gradiente conjugado, etc. De este modo, buscamos alternativas a estos métodos que nos lleven a soluciones satisfactorias. Con este objetivo se establecerán dos resultados que motivarán los métodos implementados en la siguiente sección.

**PROPOSICIÓN 3** (*Adaptación del Teorema de Moreau-Rockafellar*) Si  $f_1, f_2$  son funciones convexas, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \partial f_1(b) + \partial f_2(b) = \partial(f_1 + f_2)(b)$$

Demostración: Ver [33].

**PROPOSICIÓN 4** Un vector  $b^* \in \mathbb{R}^n$  es un mínimo de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si y sólo si  $0 \in \partial f(b^*)$

Demostración: Ver [7].

## Generalización del método de máximo descenso a la norma $l_1$

Como se comentó anteriormente, debido a que la función  $f(b) = \|b\|_1$  no es diferenciable, no podemos obtener la solución del problema (30) de forma explícita, por lo que buscamos un método iterativo que permita encontrar una solución para el problema.

Un método ampliamente utilizado de búsqueda de mínimos para funciones diferenciables corresponde al método de máximo descenso, el cual consiste en realizar la iteración

$$b^{k+1} = b^k - \lambda_k \nabla f(b^k) \quad (34)$$

donde  $b^0$  es obtenido de algún criterio dependiendo del problema (en el caso convexo con gradiente lipschitz el método converge independientemente del valor inicial), se elige una sucesión  $\lambda_k$  y un criterio de parada. En la Figura 23 podemos ver gráficamente el comportamiento de las iteraciones por medio del método de máximo descenso.

Una alternativa a más eficiente ([3]) a (34) consiste en el método proximal

$$b^{k+1} = b^k - \lambda_k \nabla f(b^{k+1}). \quad (35)$$

Si bien este método es exitoso en muchas ocasiones, por la naturaleza de este caso en particular no fué posible encontrar una expresión analítica a la ecuación (35), por lo que sería necesario realizar una subrutina numérica para solucionar esa ecuación. Con el objetivo de mantener el algoritmo lo más simple posible se decidió no implementar el método proximal.

Una generalización a funciones convexas no diferenciables consiste naturalmente en utilizar la iteración

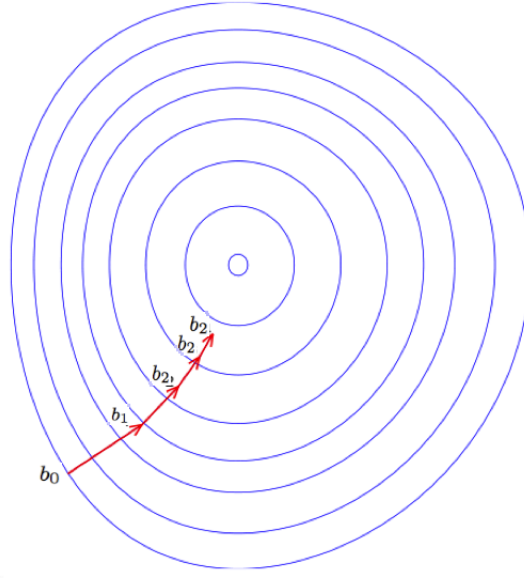


Figura 23: Método iterativo de máximo descenso de minimización de la función  $f(b)$ .

$$b^{k+1} = b^k - \lambda_k g(b^k) \quad (36)$$

donde  $g(b^k) \in \partial f(b^k)$ .

Para adaptar este método a nuestro caso, es necesario obtener el subdiferencial de  $f(b) = \|Ab - M\|_1$  para  $b \in \mathbb{R}^n$ . El cálculo de éste sigue directamente del siguiente resultado ([7]) :

**PROPOSICIÓN 5** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa, y sea  $h(b) = f(Ab - M)$ , entonces  $\partial h(b) = A^T \partial f(Ab - M)$ .

Con esto, solo basta obtener el subdiferencial de  $f(b) = \|b\|_1$ . Notemos que este es simplemente una generalización del Ejemplo 1 a más dimensiones.

Así, la función  $f(b) = \|b\|_1 = |b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|$  es diferenciable en

$$D = \{b \in \mathbb{R}^n | b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

y su subdiferencial corresponde a

$$\partial f(b) = \nabla f(b) = \begin{bmatrix} \text{sign}(b_1) \\ \text{sign}(b_2) \\ \vdots \\ \text{sign}(b_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{|b_1|} \\ \frac{b_2}{|b_2|} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{|b_n|} \end{bmatrix}, \quad \forall b \in D.$$

Para  $b \in D^c$  tenemos que, de la misma manera que en el ejemplo 1, para  $b_i = 0$

$$\partial f(b) = \{g | \|g\|_\infty \leq 1, g^T b = \|b\|_1\}$$



Por lo tanto, si definimos  $f_i(b)$  como la coordenada  $i$ -ésima del vector  $f(b)$ ,

$$\partial f_i(b) = \begin{cases} \text{sign}(b_i) & \text{si } b_i \neq 0 \\ [-1, 1] & \text{si } b_i = 0 \end{cases}$$

Buscamos entonces algún  $g(b) \in \partial f(b)$  que nos permita realizar el método (36).

Así, considerando las Proposiciones 3 y 4 se hace natural proponer

$$g(b) = \begin{cases} \text{sign}(b_i) & \text{si } b_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_i = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$g(b) = (\text{sign}(b_i))_{i=1}^n \quad (37)$$

donde podemos ver claramente que  $g(b) \in \partial f(b)$ .

### Parámetros y algoritmo a utilizar

Buscamos de alguna manera extender los métodos exitosos de optimización diferenciable para el caso no diferenciable, sin embargo, como se comenta en [14], esta transición no es directa, si no más bien depende de cada caso, es decir, de la función a minimizar. Wolfe [49] por ejemplo, da algunos ejemplos donde la extensión directa al método de máximo descenso falla.

Shor [40] demuestra que el paso constante  $\lambda_k = \lambda$  no converge, incluso para nuestro caso particular mas simple donde  $x \in \mathbb{R}$ , es decir,  $f(b) = |b|$ . El propone el uso de una secuencia de pasos que satisfaga

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty, \quad \lambda_k \rightarrow 0 \quad (38)$$

donde si esta probada la convergencia [40]. Como es común en estos métodos iterativos, coloquialmente pueden ocurrir dos casos que es de interés evitar:

- Que el paso actual sea demasiado pequeño, lo que causaría que el método converja muy lento;
- Que el paso sea demasiado grande, lo que generaría demasiada oscilación, provocando nuevamente que el método converja lento.

En la Figura 24 se pueden ver las primeras 35000 iteraciones para la norma  $\|Ab - M\|_1$ , para una matriz  $A$  de  $13250 \times 9$  y un vector  $M$  de 13250 coordenadas. Esta iteración muestra dos comportamientos simultáneos, por un lado observamos un decrecimiento cada vez mas paulatino de la norma, y por otro lado, a menor escala (en el

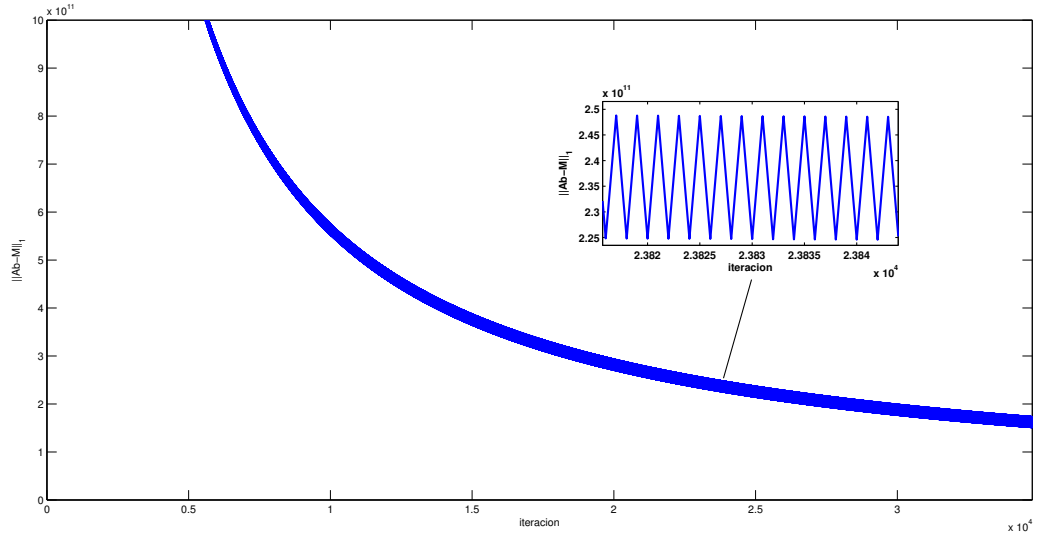


Figura 24: Gráfico del valor de  $\|Ab - M\|_1$  a lo largo de las iteraciones para un paso  $\lambda_k = \frac{1}{k}$

recuadro menor) vemos un oscilamiento permanente en las iteraciones. Esta simulación muestra los dos problemas antes mencionados. Para ella se utilizó  $\lambda_k = \frac{1}{k}$ .

Para ver por otro lado el comportamiento para un paso constante  $\lambda_k = \lambda$ , se realizaron iteraciones para distintas constantes, mostrando un comportamiento similar pero a distintas escalas (ver Figura 25).

Estos dos ejemplos reflejan el comportamiento general para la función que estamos tratando. A grandes rasgos el comportamiento para pasos grandes corresponde en principio a una rápida convergencia pero luego a mucha oscilación, lo que conduce a convergencia lenta. Para pasos más pequeños las iteraciones no oscilan, pero avanzan muy lento.

Así, analizando nuestra función en particular  $f(b) = \|Ab - M\|_1$ , consideremos la siguiente condición.

**CONDICIÓN 1** *La secuencia  $\{b_k, b_{k+1}, b_{k+2}\}$  cumple  $f(b^{k+1}) > f(b^k)$  y  $f(b^{k+1}) < f(b^{k+2})$ .*

Después de varias pruebas vimos heurísticamente que el comportamiento natural para esta función en particular responde a una buena tasa de convergencia para pasos constantes suficientemente grandes, hasta el momento dado por la condición anterior donde la función objetivo comienza a oscilar. De esta forma, se propone implementar el algoritmo 1, el cual consiste concretamente en mantener un paso constante hasta que la función objetivo comienza a oscilar, en ese momento se disminuye el paso, para continuar el algoritmo hasta su nueva oscilación y así sucesivamente. Notemos que, debido a que estamos trabajando con una sucesión armónica ( $1/k$ ) este paso cumple las condiciones de Shor (38) para convergencia del método.



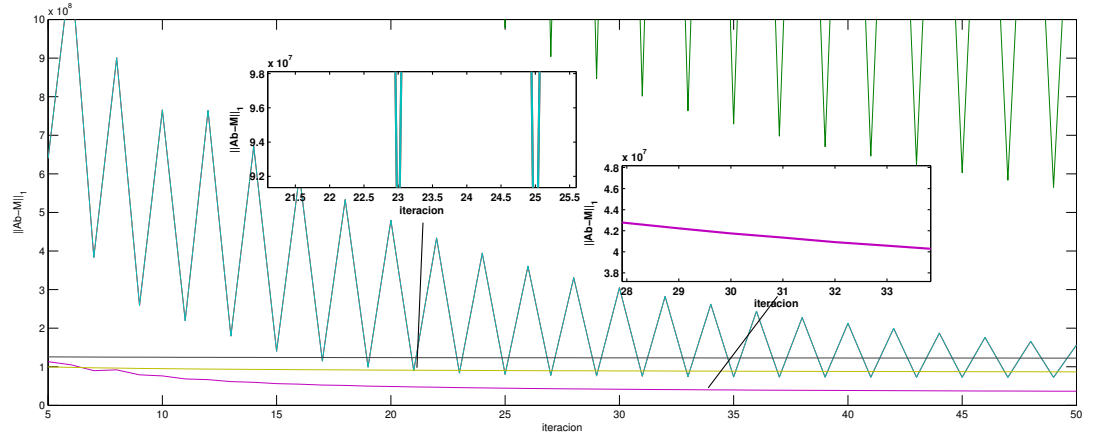


Figura 25: Gráfico del valor de  $\|Ab - M\|_1$  a lo largo de las iteraciones para distintos pasos constantes, las curvas azul y verde corresponden a valores de  $\lambda$  mas grandes donde podemos ver que en un principio desciende mas rápido el valor de la función objetivo, pero con mucha oscilación. Para las curvas negro, amarillo y burdeo no vemos oscilación, pero vemos un decrecimiento cada vez mas lento.

---

**Require:**  $A, M, \lambda, K, x_0, k = 0$   
**while**  $k < K$  **do**  
     $b_k = b_{k-1} - \lambda A^T \text{sign}(Ab_{k-1} - M)$  ;  
    **if** Condición 1 **then**  
         $\lambda = \frac{\lambda}{k}$   
    **end if**  
**end while**

---

### Criterio de parada

Usualmente un criterio de parada natural para el método de máximo descenso es

$$|\nabla f(b^k)| < \epsilon. \quad (39)$$

dado que, para una función diferenciable, el mínimo se cumple para  $\nabla f(b^k) = 0$ , y el gradiente decrece de forma continua. Sin embargo para nuestro caso este criterio no aplica. Pensemos por ejemplo en el caso mas simple  $f(b) = |b|$ , el cual tiene su mínimo en  $b = 0$ . En este caso  $|\nabla f(b^k)| = 1$  para cualquier  $b \neq 0$ , por lo que no tiene sentido establecer una condición como (39). Para funciones no diferenciables la elección del criterio no es trivial.

Una posibilidad consiste en establecer como criterio

$$|f(b^k) - f(b^{k+1})| < \epsilon.$$



Notemos que del algoritmo 1, y por la forma de  $f(b)$  un criterio similar corresponde a parar cuando se cumpla

$$\lambda_k < \delta$$

para algún  $\delta$  establecido.

Es claro además que mientras menor sea el valor de  $\delta$  más cercana es la solución al mínimo. Sin embargo este valor está limitado por la capacidad computacional.

El Algoritmo 1 se implementó exitosamente, obteniendo soluciones más cercanas al mínimo a medida que  $\delta$  es mas pequeño o que la cantidad de iteraciones es mayor y la calidad de la solución está estrechamente ligado con el tiempo de ejecución. Considerando que la implementación esta pensada para corrección de imágenes astronómicas, las cuales se toman muchas veces por noche, es fundamental que la corrección completa sea instantánea. Por ello no es posible una implementación con mucho tiempo de ejecución. Luego, se desarrolla la siguiente idea, mejorando radicalmente el tiempo de ejecución y la calidad de la solución.

### Alternativa geométrica

Consideremos nuevamente el sistema (30). Observemos que

$$\|Ab - M\|_1 = \sum_{i=1}^m |\langle a_i, b \rangle - M_i| \quad (40)$$

para  $a_i$  los vectores fila de la matriz  $A$  y  $M_i$  la cordenada  $i$ -ésima del vector  $M$ .

Esta suma tiene una importante interpretación geométrica. En la figura 26 podemos observar un caso donde  $b \in \mathbb{R}$  y  $m = 5$ . El valor de  $\|Ab - M\|_1$  corresponde a la curva superior roja, y los valores  $|\langle a_i, b \rangle - M_i|$  a las funciones inferiores. Acá podemos ver geométricamente a qué corresponde la ecuación (40).

De esta ecuación vemos que la función  $f(b) = \|Ab - M\|_1$  es una función lineal por trozos. Tenemos además que la función cambia de gradiente en los puntos donde  $|\langle a_i, b \rangle - m_i| = 0$  para algún  $i$ . De aquí se establece el siguiente teorema.

**TEOREMA 10** *Si  $b^* \in \mathbb{R}^m$  es un mínimo de  $f(b) = \|Ab - M\|_1$ , entonces  $|\langle a_i, b^* \rangle - M_i| = 0$  para al menos  $m$  valores de  $i$ .*

**Demostración:**  $f(b) = \|Ab - M\|_1$  es una función lineal (y diferenciable) por trozos donde el gradiente cambia en los puntos donde  $|\langle a_i, b \rangle - M_i| = 0$ . Si  $|\langle a_i, b \rangle - M_i| \neq 0$  para una cantidad de valores de  $i$  mayor a  $n - m$  entonces existe un subespacio lineal y una vecindad  $V$  de  $b^*$  donde  $f(b^*) > f(b)$  para algún  $b \in V$ . Por lo tanto  $f(b^*)$  no es mínimo.

**EJEMPLO 2** *Para el caso  $b \in \mathbb{R}^2$  los subespacios  $|\langle a_i, b \rangle - M_i| = 0$  corresponden a rectas<sup>13</sup>. Podemos ver en la figura 27 la forma de los valores  $|\langle a_i, b \rangle - M_i|$  donde*

<sup>13</sup>Para el caso  $b \in \mathbb{R}$  estos espacios corresponden a puntos, para el caso  $b \in \mathbb{R}^3$  corresponden a planos, y así sucesivamente.

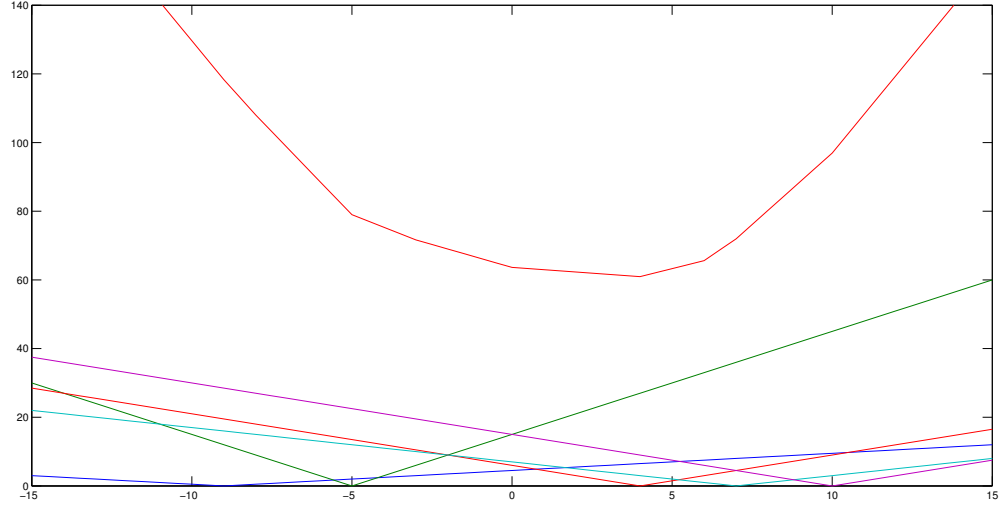


Figura 26: Suma de 5 funciones de valores absolutos

para esta figura tenemos que  $a_i = (-2, 1)^T$  y  $b = -2$ . Para este caso el subespacio  $|\langle a_i, b \rangle - M_i| = 0$  corresponde a la recta  $b_2 = 2b_1 - 2$ .

En la Figura 28 vemos el valor  $f(b) = \|Ab - M\|_1$  para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

es decir, para la suma de las funciones

$$f_1(b) = |b_1 + b_2 - 4| \quad (41)$$

$$f_2(b) = |-2b_1 + b_2 + 2| \quad (42)$$

$$f_3(b) = |b_1 + 9| \quad (43)$$

En la figura derecha vemos una vista del plano  $x - y$ , donde observamos que el mínimo se encuentra en la intersección de las rectas  $f_1 = 0$  y  $f_2 = 0$ , es decir el punto  $x^*$  satisface

$$f_1(b^*) = f_2(b^*) = 0$$

Donde se cumple el Teorema 10.

Luego se propone un nuevo mecanismo de búsqueda eficiente de mínimos, basado en las siguientes ideas

- El método de máximo descenso modificado encuentra cercanas al mínimo. A medida que mayor tiempo computacional se disponga al proceso mayor será la

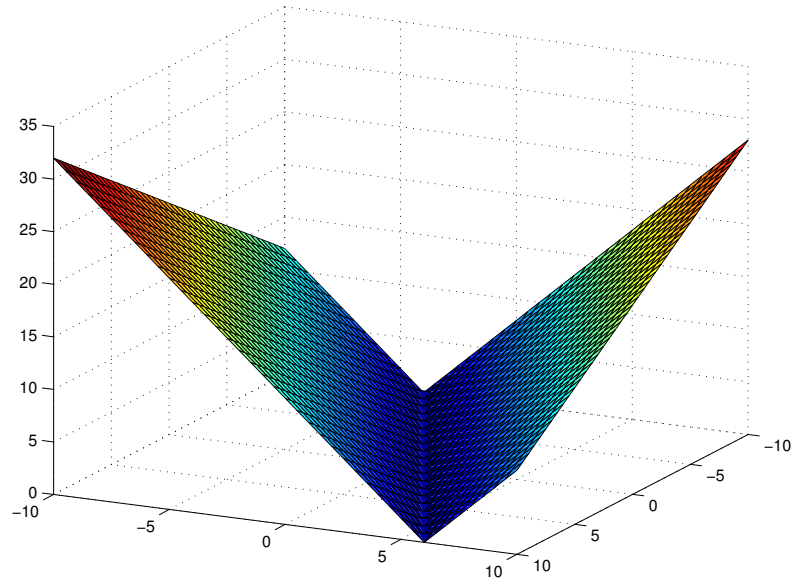


Figura 27: Función  $| -2b_1 + b_2 + 2 |$

cercanía a la solución, sin embargo buscamos un algoritmo que utilice la menor cantidad de tiempo posible, pues se trata de una corrección que se efectuará para muchas observaciones astronómicas por noche.

- Si tenemos una solución relativamente cercana al mínimo, entonces por el teorema 10 deberíamos tener al menos  $m$  ecuaciones  $|\langle a_i, b \rangle - m_i|$  cercanas a cero;
- Por el teorema 10, la solución óptima satisface un subsistema cuadrado

$$\hat{A}b = \hat{M},$$

donde  $\hat{A}$  es una matriz cuadrada de  $m \times m$  y  $M$  un vector de  $m$  coordenadas <sup>14</sup>;

- La cantidad de combinaciones de  $m$  ecuaciones entre las  $n$  posibilidades corresponde a  $\binom{n}{m}$ . Considerando que  $n$  es del orden de 13000 y  $m$  alrededor de 9, este número es demasiado grande <sup>15</sup>. No existe computador que calcule todas las posibilidades para encontrar el mínimo en tiempo razonable;
- Una vez que tenemos una solución  $b^\#$  cercana al mínimo, podemos evaluar las  $m$  ecuaciones  $|\langle a_i, b^\# \rangle - M_i|$  y ordenarlas de menor a mayor obteniendo las mas cercanas a cero;
- Así, podemos tener una cantidad razonable de sub-sistemas (de muchas menos coordenadas) priorizando las filas de  $A$  tales que  $|\langle a_i, b^\# \rangle - m_i|$  es cercano al

<sup>14</sup>Notar que  $m$  es el grado del polinomio, que por lo general es 7, 9, 11, es decir es un sistema muy pequeño y fácil de calcular

<sup>15</sup>  $\binom{13000}{9} = 1,4176 * 10^{31}$

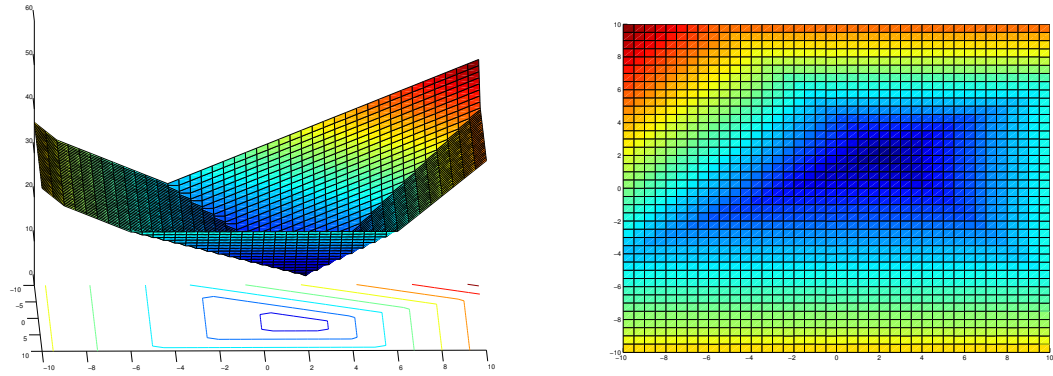


Figura 28: Ejemplo de una función  $f(b) = \|Ab - M\|_1$ .

cero. De este modo solucionamos el sistema por medio de SVD y las técnicas descritas en el Capítulo 4, para cada uno de estos sub-sistemas, quedándonos con la solución de menor norma.

En base a estas ideas se construye el siguiente algoritmo

---

**Algorithm 1** Método de máximo descenso ampliado

---

**Require:**  $A, M, \lambda, s, l, k = 0$

- Obtener  $b^\#$  por medio del algoritmo 1. Sujeto a una condición restrictiva de iteraciones (procurando poco tiempo de ejecución) ;
- Ordenar las filas de la matriz  $Ab^\# - M$  de menor a mayor y almacenar los índices correspondientes a las filas ordenadas en el vector  $J$ ;

**for**  $i=s:l$  **do**

- Definimos la sub-matriz de  $A$  que toma las filas de  $A$  correspondientes a los primeros  $i$  valores de  $J$  como  $A^\neg$ ;
- Definimos el sub-vector de  $M$  que toma las coordenadas de  $M$  correspondientes a los primeros  $i$  valores de  $J$  como  $M^\neg$ ;
- Resolvemos el sub-sistema  $A^\neg b = M^\neg$  por medio de SVD;
- Guardamos  $\|A^\neg b - M^\neg\|_1$

**end for**

- Entregamos el valor de  $b$  que tiene menor norma  $\|A^\neg b - M^\neg\|_1$
-

Continuando con las simulaciones realizadas a lo largo de esta tesis, entre los tests que se realizaron, podemos destacar dos casos distintos:

El primero corresponde a la figura 29, donde podemos ver una comparación entre la minimización de mínimos cuadrados y la minimización para la norma  $\|\cdot\|_1$ . Aca podemos apreciar soluciones similares, pero con el problema de outlier subsanado.

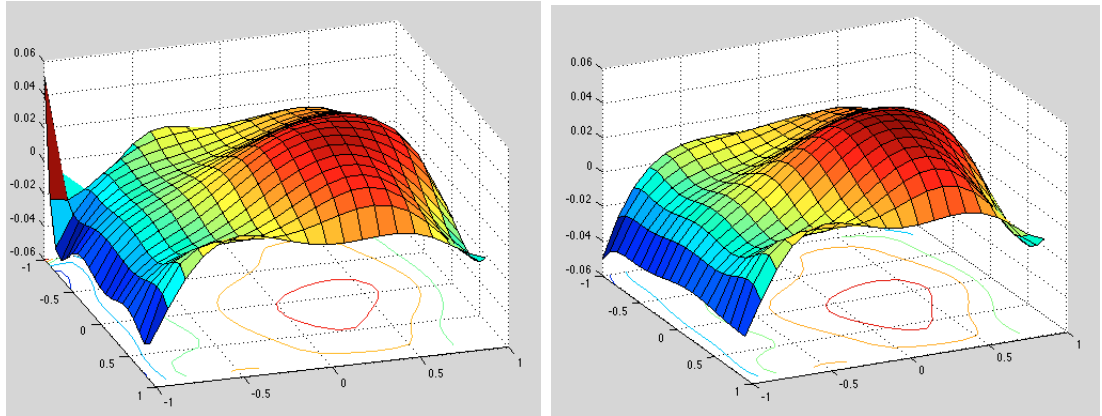
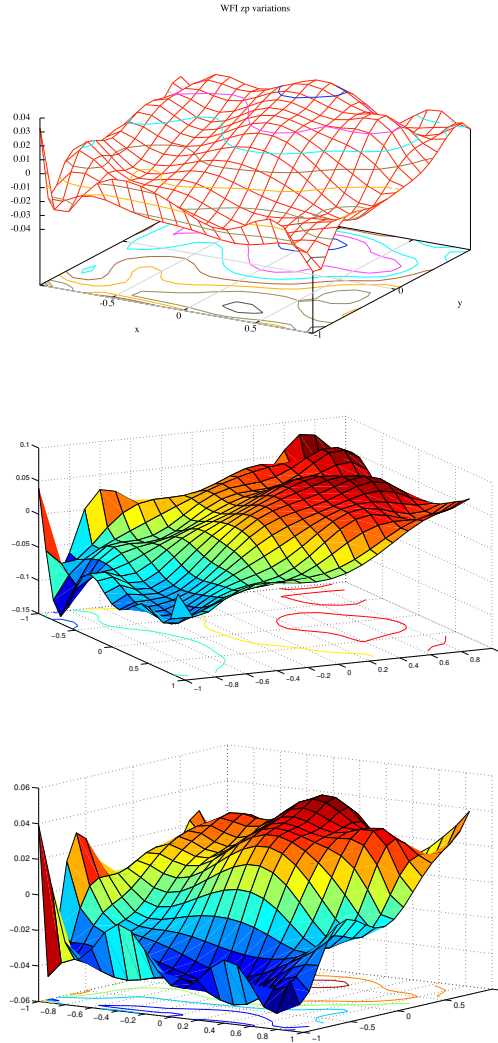


Figura 29: Aproximación de grado 5 para datos tomados el 19-5-2011. A la izquierda se encuentra la solución de mínimos cuadrados y a la derecha la solución por medio de minimizar la norma  $l_1$

Para el segundo caso, se utilizó una imagen con cielo fotométrico, es decir sin variaciones atmosféricas. En este caso es de esperar que la solución obtenida por el método uno refleje las mismas características que para el método dos, pues el modelo simplemente hace que el valor correspondiente a la componente atmosférica desaparezca  $\delta_t = 0$ . Podemos ver en la Figura 30 una comparación de los tres métodos implementados: El método anterior (método uno) en la parte superior, el método desarrollado en capítulos anteriores (con la componente atmosférica) y los algoritmos desarrollados en este capítulo para el método dos (también con la componente atmosférica añadida). Acá podemos ver, en las escalas de los gráficos, como en la tercera figura la gráfica ya no dispara su escala, manteniendo la escala obtenida exitosamente por el primer método pero con la ventaja de que tiene la componente atmosférica añadida, lo que lo hace responder de mejor forma a los requerimientos físicos del problema, y considera un modelamiento matemático mas completo.



*Imágen obtenida exitosamente por el primer método [39]. Este método funciona bien para cielos fotométricos.*

*Imágen obtenida según el modelo 2. Aca el modelo sufre del mal condicionamiento producto del propio modelo para grados mas elevados (este es un polinomio que incluye términos  $x^9y^9$ ). Notar que la escala de la gráfica cambia a mas del 200 %.*

*Superficie obtenida mediante el algoritmo 1. Podemos comprobar con la primera imagen como subsana las dificultades del método obteniendo soluciones concordantes, con los coeficientes de los polinomios similares. Notar que las escalas para ambas (esta gráfica comparada con la primera) son similares.*

Figura 30: Comparación para los 3 métodos con datos de cielo fotométrico. Aca podemos ver como la minimización de norma  $l_1$  subsana (observar la escala de los gráficos) los problemas detectados previamente. Los gráficos son realizados con diferentes softwares, pues el primero corresponde a un gráfico antiguo utilizado para comparar, pero es importante notar en las escalas de los gráficos, la cual muestra en el segundo gráfico un problema de escala, que como se vió a lo largo de la tesis responde a un mal condicionamiento del segundo método implementado y a problemas de outliers. Si bien este método no responde precisamente para polinomios de orden alto es necesario de implementar para subsanar problemas de la atmósfera. En el tercer gráfico se puede ver una mejora en la escala, sin los problemas del método dos y, a diferencia del primer gráfico, añadiendo la componente atmosférica.







# Capítulo 6

## Conclusiones

“ Solo en el celeste cielo, donde pone los ojos el poeta.

”

---

Richard Bach, *Juan salvador gaviota*

Si bien el método desarrollado en [39] resulta útil para cielos fotométricos, es necesario generalizar el modelo para observaciones en cielos no tan óptimos. En este contexto se trabajó con un modelo más completo que considera la componente atmosférica en la que las observaciones pueden ver afectada su fotometría. Si bien el nuevo modelo resulta explicar de mejor forma el fenómeno físico, matemáticamente presenta inconvenientes relacionados a un peor condicionamiento. Una primera solución consistió en aplicar métodos de regularización al sistema, como los son los métodos de valores singulares truncados.

Los datos además están muy afectados a outliers, por la naturaleza de las mediciones. Se experimentó con una minimización para la norma  $l_1$  en lugar de utilizar mínimos cuadrados ordinarios. Para esta nueva técnica se obtuvieron mejores resultados, obteniendo curvas más suaves y menos afectas a los ruidos propios de los datos. Sin embargo, el método de máximo descenso generalizado cuenta con un tiempo de ejecución mayor al aceptado. Para subsanar esto se diseñó un método alternativo tomando provecho de las condiciones geométricas particulares de la función  $\|Ab - M\|_1$ .

De esta forma, se construyó un método de poco costo computacional que permite obtener aproximaciones a la variación del punto cero para cielos fotométricos capaces de reducir la descalibración producto del procedimiento de Flat Fielding en alrededor de un 10 % [39]. Este nivel constituye los más altos índices de corrección que se habían logrado en [2, 39, 46], logrando ahora que el método sea implementable a cualquier tipo de cielo.

En conclusión, en base al desarrollo de herramientas matemáticas se construyó una generalización a métodos de corrección fotométrica pudiendo replicar los resultados anteriores [39, 2, 39, 46] pero ahora capaz de ser aplicado a cielos con variaciones atmosféricas.



## Bibliografía

- [1] F. ALVAREZ *Análisis Convexo y dualidad* U. Chile, 2005.
- [2] M. I. ANDERSEN, L. FREYHAMMER, AND J. STORM *Gain calibration of array detectors by shifted and rotated exposures* European Southern Observatory, 1995.
- [3] H. ATTOUCH, M. CZARNECKI, J. PEYPOUQUET *Coupling forward-backward with penalty schemes and parallel splitting for constrained variational inequalities*. SIAM Journal on Optimization 21 no. 4, 1251—1274, 2011.
- [4] D. BERTSEKAS *Nonlinear Programming* Second Edition. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1999.
- [5] D. BJÖRK. *Numerical Methods* Prentice-Hall Series in automatic computation, 1974.
- [6] BORN, MAX, WOLF, EMIL. *Principles of Optics*. Cambridge: Cambridge University Press. p. 461. ISBN 0-521-64222-1, 1999.
- [7] S. BOYD AND L. VANDENBERGUE *Subgradients* Stanford University, 2007.
- [8] E. BUDDING, O. DEMIRCAN *Introduction to astronomical photometry* Cambridge Observing Handbooks for Research Astronomers, 2007.
- [9] J. A. CADZOW *Minimum  $l_1$ ,  $l_2$ , and  $l_\infty$  Norm Approximate Solutions to an Overdetermined System of Linear Equations* Digital Signal Processing 12, 524–560, 2002.
- [10] B. CARRY *Études des propriétés physiques des astéroïdes par imagerie à haute résolution angulaire* Phd Thesis. 2009.
- [11] F. CLARKE *Optimization and Nonsmooth Analysis* classics In Applied Mathematics, 1987.
- [12] A. DOWNEY *Think Python* Green Tea Press, 2012.
- [13] SERIE INFORMATIVA ESO *El Observatorio la Silla* Departamento de Educación y Extensión de ESO-Chile. 2001.
- [14] S. ELHEDHLI, J. GOFFIN, J. VIAL *Nondifferentiable Optimization: Introduction, Applications and Algorithms* Les Cahiers du GERARD, 2000.
- [15] W. GAUTSHCHI *The Condition of Orthogonal Polynomials* Mathematics of Computation, Volume 26, Number 120, 1972.
- [16] G.H. GOLUB, CH. F. LOAN *Matrix Computations* The Johns Hopkins University Press, Third edition, 1996.
- [17] M. HANKE *On lanczos based methods for the regularisation of discrete ill-posed problems* Sweetr & Zeitlinger, Vol 41, No. 5, pp 1008-1018, 2001.



- 
- [18] R. HAGEN, S. ROCH, B. SILBERMANN *C\*-algebras and Numerical Analysis* CRC Press, Section 2.1.2, 2001.
- [19] C. HANSEN *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems* SIAM, Society for industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [20] R. HANSON *A numerical method for solving Fredholm integral equations of the first kind using singular values* SIAM J. Numer. Anal 8, pp616-622, 1971.
- [21] W. KAHAN *Numerical Linear Algebra* Canadian Math. Bull 9, 757-801, 1966.
- [22] A. K. KAW *Numerical Methods With Applications* Second Edition, 2011.
- [23] D. KINCAID, W. CHENEY *Analiza numeryczna* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2002.
- [24] G. LUGOSI AND K. ZEGER *Nonparametric Estimation via Empirical Risk Minimization* IEEE Transactions on information theory, VOL 41, NO 3, 1995.
- [25] D.L. MAMAS *An explanation for quasars and gamma ray bursts* Physics Essays: December 2011, Vol. 24, No. 4, pp. 475-476, 2011.
- [26] D. MARTI ET AL *Tentative Numpy Tutorial* [www.scipy.org](http://www.scipy.org), 2006.
- [27] E.H. MOORE *On the reciprocal of the general algebraic matrix* Bulletin of the American Mathematical Society 26 (9): 394-395, 1920.
- [28] G. MORANDI, F. NAPOLI, E. ERCOLESSI *Statistical mechanics: an intermediate course* ISBN 978-981-02-4477-4, 2001.
- [29] J.B. OKE, R.E. SCHILD *The Absolute Spectral Energy Distribution of Alpha Lyrae* Astrophysical Journal 161: 1015-1023, 1970.
- [30] R. PENROSE *A generalized inverse for matrices* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 51: 406-413, 1955.
- [31] J.R. RICE *A Theory of Condition* SIAM J. Num. Anal. 3, 287-310, 1966.
- [32] R. RITTER, C. VALENZUELA, A. ALARCÓN *Observatorios Astronómicos de Chile* UAI. 2009.
- [33] R.T. ROCKAFELLAR *Convex Analysis* Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [34] W. ROMANISHIN *An Introduction to Astronomical Photometry Using CCDs* University of Oklahoma, 2002.
- [35] W. RUDIN *Functional analysis* McGraw-Hill, ISBN 0-07-054236-8, 1973.
- [36] W. RUDIN *Principles of mathematical analysis (3rd. ed.)*, McGraw-Hill, ISBN: 978-0-07-054235-8, 1976
-



- 
- [37] D. J. SCHROEDER *Astronomical Optics* Second Edition, Academic Press, 2000.
- [38] F. SELMAN *Wide-field imagine at ESO* European Southern Observatory, 2008.
- [39] F. SELMAN *Photometric flats: an essential ingredient for photometry with wide field imagers* La Silla Observatory, 2004.
- [40] N. Z. SHOR, *sub gradient methods: A survey of soviet research* Nonsmooth optimisation: Proceedings of the ILASA workshop March 28-april 8, 1977 C. Lemaréchal and R. mifflin eds. Pergamon Press 1978.
- [41] C. STERKEN, J. MANFROID *Astronomical Photometry* in Kluwer Academic Publishers, A Guide, 1992.
- [42] C. STERKEN ET AL *Astronomy and Astrophysics* 2008.
- [43] G.W STEWART *On the early history of the singular value decomposition* SIAM Review, 35, pp. 551-566, 1993
- [44] A. TIKHONOV AND V. ARSENIN *Solutions of Ill-Posed Problems* John wiley & sons. 1977.
- [45] A. M. TURING *Rounding-off errors in matrix processes* Quart. J Mech. Appl. Math, National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex, pp. 287-308, 1947.
- [46] B. VANDAME *Traitments D'Images a Grand-Champs et Multi-Longeurs D'ondes* Phd Thesis, Universite de nice-sophia antipolis. 2004.
- [47] J. VARAH. *On the numerical solution of ill-conditioned linear systems whit applications to ill.posed problems* SIAM, J. Numeric. Anal, 10, pp. 257-267, 1973
- [48] B. WARNER *A Practical Guide to Lightcurve Photometry and Analysis* Patrick Moores Practical Astronomy Series, 2006.
- [49] P. WOLFE *A method of conjugate sub gradients for minimising non differentiable functions* Mathematical programming study, 3, 145-173, 1975.
- [50] Y. ZHANG *Solution-recovery in  $l_1$  norm for non-square linear systems: deterministic conditions and open questions* Technical Report TR05-06, 2005.